eingereicht 11.12.2014 erschienen in: Physik in unserer Zeit **46** (2015), 194 - 198

Bierdeckelsalto

Friedhelm Kuypers und Christian Ucke

Physik mit Bierdeckeln kann unterhaltsam und lehrreich zugleich sein. Die Anwendung von Impuls- und Drehimpulssatz führen zu einfachen Abschätzungen zur Mechanik des Bierdeckelsaltos. Physiksimulationsprogramme erlauben bequem die Variation der Parameter und einen Vergleich mit der Realität. High-speed-videos ergänzen Theorie und Simulation.

Der Bierdeckel ist eine deutsche Erfindung von 1882 [1]. Milliarden werden jedes Jahr verbraucht. Es gibt alle möglichen Formen – quadratisch, kreisrund, elliptisch, bis hin zu speziellen, durch eventuelle Werbung vorgegebene Umrisse. Ein beliebtes Spiel mit Bierdeckeln besteht darin, ihn so auf eine Tischkante zu legen, dass er mit etwas weniger als der Hälfte über die Kante hinweg ragt, ihn von unten mit den ausgestreckten Fingern hochzuschnellen, um ihn dann zwischen Finger und Daumen wieder aufzufangen. Je nach Geschicklichkeit vollführt er dabei eine halbe oder mehr Umdrehungen. Auch mit Spielkarten, ja sogar mit Münzen und ähnlichen Objekten ist das machbar. Im Internet finden sich diverse Informationen und Videos dazu.

Stroboskopisches Bild eines 360°-Bierdeckelsaltos durch Überlagerung von neun Bildern im Abstand von 20ms aus einem Video. Die Geschwindigkeit der Fingerspitzen beträgt 3 m/s im Moment des Anstoßes an den Bierdeckel. Der quadratische Bierdeckel hat eine Kantenlänge von 9,3 cm. In diesem Beispiel wurde der Bierdeckel nur hoch gestoßen und nicht aufgefangen.

Physikalisch gesehen, handelt es sich um einen unelastischen Kraftstoß zwischen dem sehr leichten (m ~ 5 g) und dünnen (h ~ 1,5 mm) Bierdeckel und der demgegenüber sehr großen Masse der Hand mit Unterarm. Die Geschwindigkeit der hochschnellenden Hand bewegt sich in der Größenordnung von 2 - 4m/s und wird durch den Stoß vernachlässigbar wenig verändert. Der Bierdeckel hebt mit einer geringeren Schwerpunktgeschwindigkeit ab. Eventuelle elastische Eigenschaften des Bierdeckels werden vernachlässigt; er wird als starrer Körper betrachtet. Je nach Angriffspunkt der Kraft am Deckel kann der auf dem Tisch liegende Rand noch etwas auf dem Tisch gleiten bzw. gleich ganz abheben.

Theorie des Bierdeckelsaltos

Ein dünner Bierdeckel mit Masse m liegt an einer Tischkante und wird durch einen sehr kurzen, senkrechten Kraftstoß $\hat{F}$ nach oben gestoßen, so dass er von der Tischplatte abhebt und in die Luft fliegt

(Abbildung 1). Der Angriffspunkt der Kraft hat den Abstand *a* vom linken Rand des Bierdeckels. Beispielhaft werde hier ein quadratischer Bierdeckel mit der Seitenlänge *l* betrachtet. Die Verbindungslinie $\overline{SP}$ vom Schwerpunkt S zum Angriffspunkt P der Kraft *F* soll parallel bzw. senkrecht zu den Deckelkanten sein.

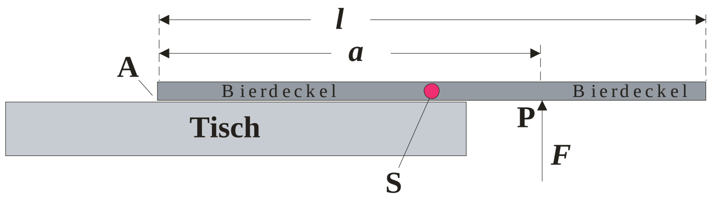

Abb. 1: *Ein sehr kurzer Kraftstoß schleudert den Bierdeckel nach oben.*

Der Stoß soll sehr kurz sein, so dass während des Stoßes der Bierdeckel kaum ausschlägt und die Gewichtskraft vernachlässigt werden kann.

Greift die Kraft *F* direkt unter dem Schwerpunkt S an (man denke sich ein Loch in der Tischplatte), würde der Bierdeckel theoretisch senkrecht und ohne Drehung nach oben fliegen. Die Schwerpunktgeschwindigkeit v_s ist unmittelbar nach dem Stoß gleich der Stoßgeschwindigkeit v_p. Im Weiteren nimmt die Geschwindigkeit im Schwerefeld entsprechend ab.

Greift die Kraft am rechten Rand an, würde der linke Rand des Bierdeckels zunächst auf dem Tisch liegen bleiben, eine Kraft auf den Tisch ausüben und der rechte Rand nach oben gehen (siehe Zusatzmaterialien). Der Bierdeckel erhält eine Drehung und hebt schließlich ab. Die Schwerpunktgeschwindigkeit v_s unmittelbar nach dem Stoß ist geringer als die Stoßgeschwindigkeit v_p.

Zwischen diesen beiden Extremen gibt es einen kritischen Abstand a_{krit} vom linken Rand des Bierdeckels, bei dem der sehr kurze Stoß dazu führt, dass der linke Rand des Bierdeckels im Punkt A gerade keine Kraft auf den Tisch ausübt und auch nicht senkrecht nach oben ausüben könnte, wenn dort ein Hindernis wäre. Wir betrachten aus Gründen der Übersichtlichkeit der Rechnungen hier nur diese Möglichkeit, obwohl genau dieser Fall in Wirklichkeit meist nur näherungsweise zu realisieren ist. In den Zusatzmaterialien sind weitere Möglichkeiten und auch andere Formen von Bierdeckeln (kreisförmig, elliptisch) behandelt und die Rechnungen ausgeführt.

Für diesen kritischen Wert ergibt die Rechnung (siehe Zusatzmaterialien) für einen quadratischen Bierdeckel folgende einfache, formelmäßige Zusammenhänge:

$$a_{krit}^{Quadr} = \frac{2}{3} l \tag{1}$$

Außerdem ergibt sich für diesen Fall

$$v_S^{Quadr.} = \frac{3}{4} v_P \tag{2}$$

Und für die Winkelgeschwindigkeit ω gilt die kinematische Beziehung

$$\omega = \frac{2 \cdot v_S}{l} \tag{3}$$

Die Formeln hängen nicht von der Masse bzw. vom Trägheitsmoment des Bierdeckels ab. Das liegt an den gemachten Voraussetzungen, dass die Masse des Bierdeckels klein gegen die Masse von Arm mit Fingern ist und dass sich deswegen die Geschwindigkeit der stoßenden Finger durch den Stoß nicht ändert. Auch muss die Dicke *h* des Bierdeckels klein gegen die Kantenlänge *l* sein.

erschienen in: Physik in unserer Zeit **46** (2015), 194 - 198

Videos und Messungen mit Bierdeckeln

Um die Theorie mit der Realität vergleichen zu können, wurde eine Vorrichtung (Abbildung 2) aus Stativteilen zusammengestellt, mit der ein definierter und sehr kurzer Stoß erzeugt werden kann. Die Konstruktion ähnelt bezüglich des Anstoßens an den Bierdeckel in gewisser Hinsicht dem menschlichen Arm mit Hand und Fingern. Die im Folgenden vorgestellten Videos sind mit zwei übereinander geklebten Bierdeckeln gemacht worden (Bierdeckelduo). Bei high-speed-Aufnahmen mit **einem** Bierdeckel hat sich gezeigt, dass sich Bierdeckel elastisch etwas durchbiegen, was einen Teil der Stoßenergie für Schwingungen des Bierdeckels absorbieren würde. Bei zwei oder mehr verklebten Bierdeckeln war dieser Effekt kaum noch zu beobachten.

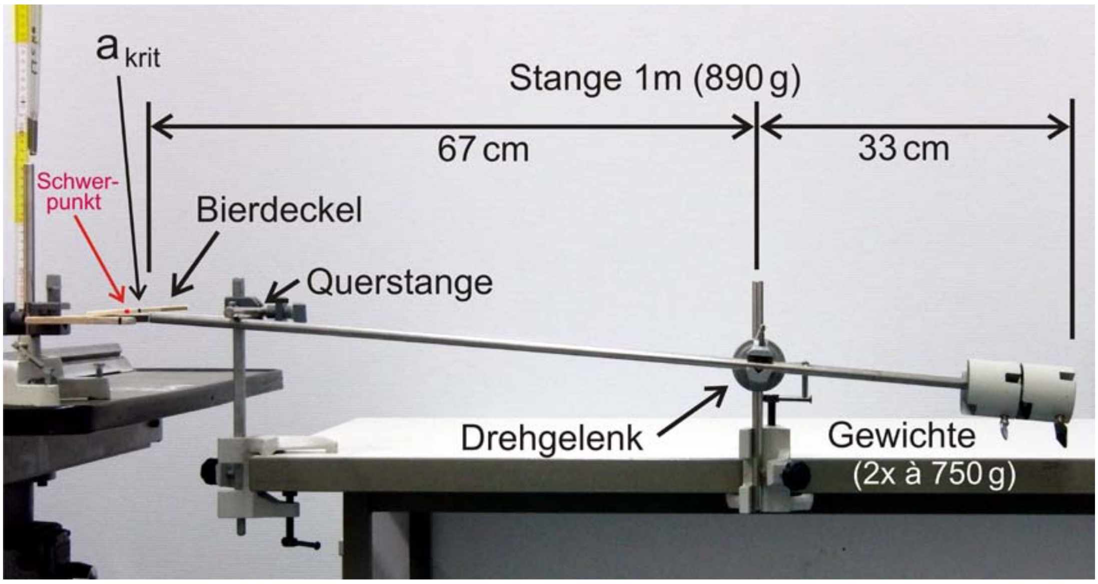

Abb. 2: *Konstruktion zur definierten Stoßanregung der Bierdeckel mit Hilfe von Stativteilen. Eine Stange ist in einem Drehgelenk befestigt und endseitig mit Gewichten versehen. Lenkt man das Stangenende nach unten aus, schwingt die Stange zurück. Das Ende stößt den Bierdeckel mit etwa 2 bis 3 m/s nach oben. Eine Querstange verhindert das Weiterschwingen.*

Das Stangenende hebt im Stoßpunkt den Bierdeckel um etwa 2mm an, dann wird die Stange durch eine Querstange gestoppt. Auf diese Weise lässt sich ein sehr kurzer Stoß realisieren. Bei einem Stoß mit den Fingern nimmt die Geschwindigkeit der Finger im Verlauf der Hochschnellbewegung zu, weil man von einer Position nicht allzuweit unterhalb des Bierdeckels loslegt und auf der kurzen Strecke beschleunigen muss, um genügend Geschwindigkeit zu erreichen. Die Fingerspitzen berühren dann den Bierdeckel nach dem Stoß noch eine Zeitlang, bis sie von ihm abgleiten. Die Kontaktzeit der Fingerspitzen mit dem Bierdeckel ist hier größer als im Fall der Stange.

Mit Hilfe einer einfachen digitalen Kamera mit high-speed-video-modus [2] wurden Videos mit 420 Bildern pro Sekunde (420 fps) aufgenommen.

In Abbildung 3 ist eine aus einem Video entnommene Aufnahmeserie mit einem quadratischen Bierdeckel (Bierdeckelduo; m = 10,9 g) und einer Kantenlänge von l = 9 cm wiedergegeben. Das Stangenende berührt den Bierdeckel im kritischen Punkt a_{krit} = 6 cm von der auf dem Gestell befindlichen Kante.

Aus dem Video (Bierdeckelsalto1_420fps.mp4 ; siehe Zusatzmaterialien; http://bit.ly/mWfccy) lässt sich die Geschwindigkeit des Stangenendes beim Auftreffen auf den Bierdeckel im kritischen Abstand a_{krit} zu v_P = 3,05 m/s und die Schwerpunktabhebegeschwindigkeit des Bierdeckels zu v_S = 2,25 m/s ermitteln. Eine Unsicherheit von etwa 3% ist aufgrund der Auswertung aus den unscharfen Video-aufnahmen anzusetzen. Der aufliegende Rand des Bierdeckels hebt unmittelbar nach dem sehr kurzen Stoß sofort ab. Der Schwerpunkt bewegt sich senkrecht nach oben.

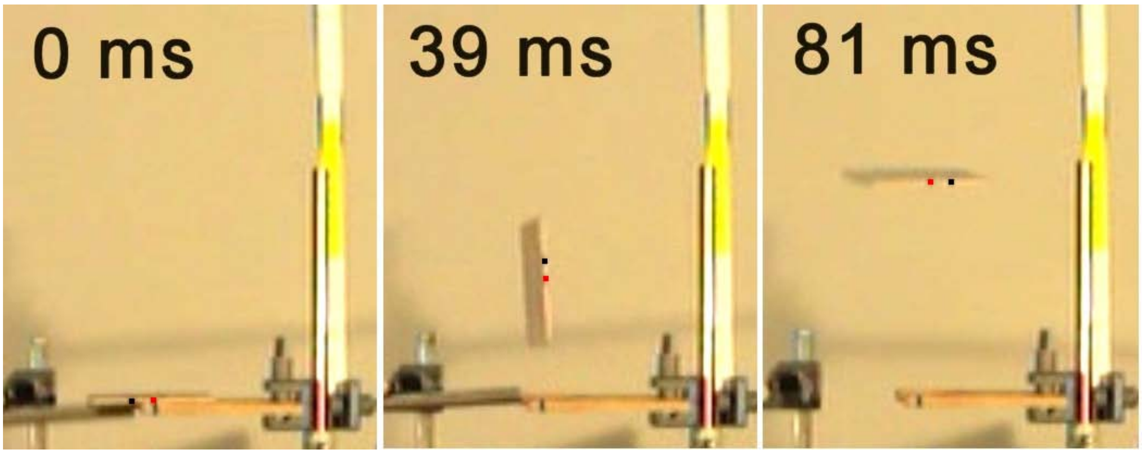

Abb. 3: *Ausschnitte aus dem Video mit 420 Bildern/Sekunde. Die Kantenlänge des quadratischen Bierdeckels* (l = 9 cm) *ergibt einen Maßstab. Der rote Punkt in der Mitte der Kante des Bierdeckels markiert den Schwerpunkt; der schwarze Punkt die Stelle* a_{krit}.

Mit einer Geschwindigkeit des Stangenendes v_P = 3,05 m/s ergibt sich aus Formel 1 mit a_{krit} = 6 cm: v_S = 2,29 m/s. Im Rahmen der Unsicherheit stimmen Theorie und Experiment überein.

Mit der realen Schwerpunktabhebegeschwindigkeit von v_s = 2,25 m/s errechnet sich die maximal erreichte Höhe des Schwerpunkts ohne Berücksichtigung des Luftwiderstandes zu $h = v^2/2g$ = $2{,}25^2/2\cdot 9{,}8$ = 0,26 m. Aus dem Video ergibt sich h_{real} = 0,27 m - eine sehr gute Übereinstimmung.

Aus der Bildsequenz ist ersichtlich, dass der Bierdeckel nach 0,039 Sekunden etwa eine viertel Drehung $(\approx 90° = \pi/2)$ vollführt hat, d. h. $\omega = \pi/(2\cdot 0{,}039\ \mathrm{s}) \approx 40\ \mathrm{s}^{-1}$.

Aus Formel (3) ergibt sich $\omega = \dfrac{2\cdot v_S}{l} = \dfrac{2\cdot 2{,}25\ \mathrm{ms}^{-1}}{0{,}09\ \mathrm{m}} = 50\ \mathrm{s}^{-1}$.

Das stimmt mit dem aus Abbildung 3 ermittelten Wert von ω = 40 s^{-1} nicht überein. Vergleichbare Unterschiede ergeben sich mit weiteren Videos.

Bei der Ableitung der hier verwendeten Formeln wurde ein möglicher Luftwiderstand beim Aufsteigen und Rotieren des Bierdeckels nicht berücksichtigt. Tatsächlich ergibt sich aus den Auswertungen der Videos eine Abnahme der Winkelgeschwindigkeit mit der Zeit. Eine theoretische Behandlung des Luftwiderstandes des rotierenden und dabei noch auf- oder absteigenden Bierdeckels geht weit über den Rahmen der vorliegenden Betrachtung hinaus.

Simulation mit Interactive Physics

Mit Physik-Simulationsprogrammen lässt sich der Bierdeckelsalto ebenfalls darstellen. Auch kann man damit Parameter leichter als in der Wirklichkeit variieren und Situationen darstellen, die theoretisch nur sehr aufwendig zu lösen wären. Allerdings kennt man nicht die im Programm implantierten Funktionen, so dass man sehr vorsichtig mit den Interpretationen der Ergebnisse umgehen muss. Uns stand das Programm Interactive Physics [3] zur Verfügung.

In Abbildung 4 ist eine derartige Simulation eines halben Bierdeckelsaltos dargestellt (90° und 180°-Drehung).

Eine absichtlich sehr groß gewählte Stoßmasse von 10 kg stößt unelastisch mit einer Geschwindigkeit v_p = 3,05 m/s im Abstand a_{krit} = 6 cm beim Punkt P an einen quadratischen und starren Bierdeckel (Kantenlänge l = 9 cm; m = 11 g). Dieser Wert entspricht der aus dem Video ermittelten Stoßgeschwindigkeit. Reibung (Luftwiderstand) ist vernachlässigt.

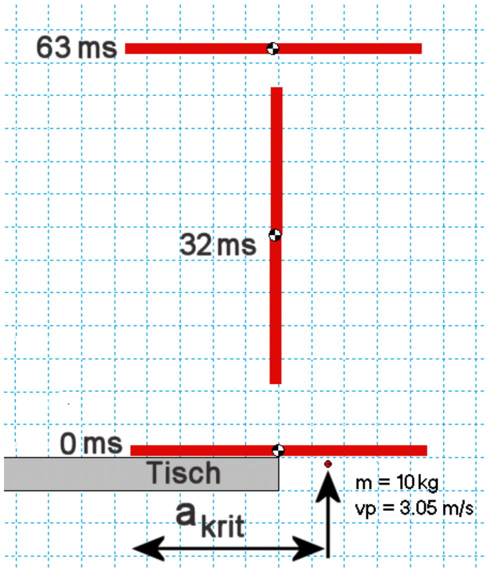

Abb.4: *Ausschnitt der Simulation eines Bierdeckelsaltos mit Interactive Physics. Die Gitterweite beträgt 1 cm.*

Das Programm berechnet das Trägheitsmoment des quadratischen Bierdeckels (Bierdeckelduo) richtig zu $I = 7{,}4\cdot10^{-6}$ kgm^2. Diese Rechnung dient zur Kontrolle.

Die Schwerpunktabhebegeschwindigkeit ergibt bei der Simulation v_s = 2,28 m/s, was mit der Theorie übereinstimmt.

Die maximale Höhe des Schwerpunkts folgt aus der Simulation zu h = 26,8 cm. Das ist direkt vergleichbar mit dem aus dem Video ermittelten Wert von 0,27 m.

Die Winkelgeschwindigkeit aus der Simulation ergibt sich zu $\omega = \pi/0{,}063\,\mathrm{s} = 50\ \mathrm{s}^{-1}$. Das stimmt mit der Theorie aus Formel (3) überein, aber nicht mit dem Video (40 s^{-1}).

Verändert man die Parameter etwas und nimmt eine Stoßmasse von nur 0,5 kg (etwa die Hälfte der Masse der Stange), ergibt sich die gleiche Winkelgeschwindigkeit von $\omega = 50\ \mathrm{s}^{-1}$, erst mit einer Stoßmasse von 0,1 kg ergibt sich nur noch ω = 47 s¯1. Die Größe der Stoßmasse ist also nicht sehr entscheidend, jedenfalls solange sie deutlich größer als die Masse des Bierdeckels ist.

Verschiebt man den Angriffspunkt der Kraft um 3 mm nach links (a_{krit} -3 mm) ergibt sich $\omega = 45\ \mathrm{s}^{-1}$; bei einem um 3 mm nach rechts verschobenen Angriffspunkt ((a_{krit} +3 mm) folgt $\omega = 48\ \mathrm{s}^{-1}$. Die Winkelgeschwindigkeit hängt also deutlich vom Angriffspunkt der Kraft ab. Sie erreicht ihr Maximum gerade bei dem Wert von $a_{krit.}$ (siehe auch Formel (10) in den Zusatzmaterialien).

Die Übereinstimmung der mit der Simulation ermittelten Werte von Stoß-, Schwerpunkt- und Winkelgeschwindigkeit mit der Theorie ist sehr gut.

Ein Video der Simulation (Bierdeckelsalto_Simulation2.mp4) zeigt den kompletten Verlauf eines von einem Tisch angestoßenen Bierdeckels.

Stabilität der Bierdeckelrotation

Jedem festen Körper lassen sich drei sogenannte Hauptträgheitsachsen zuordnen. Zu diesen gehören die drei Hauptträgheitsmomente. Im Allgemeinen sind die drei Trägheitsmomente verschieden groß. Eine Rotation um die Achsen des maximalen und minimalen Hauptträgheitsmoments ist stabil. Eine Rotation um die Achse des mittleren Trägheitsmoments ist instabil.

Kreisförmige Bierdeckel sind sehr flache Zylinder ($h<<R$). Das größte Trägheitsmoment weisen sie in der Zylinderachse auf. Die beiden dazu senkrechten Hauptträgheitsmomente sind nur halb so groß und aus Symmetriegründen gleich groß. Kreisrunde Bierdeckel rotieren prinzipiell nicht stabil um diese beiden Achsen. Da beim Bierdeckelsalto üblicherweise nicht mehr als zwei Umdrehungen betrachtet werden, fällt diese Instabilitität bei so wenigen Umdrehungen jedoch kaum auf.

Quadratische Bierdeckel haben ebenfalls zwei gleiche Hauptträgheitsmomente und verhalten sich bei Rotation wie kreisrunde Bierdeckel.

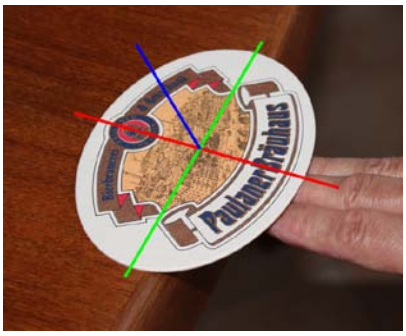

Abb.5: *Hauptträgheitsachsen eines elliptischen Bierdeckels. Die Achse des kleinsten Trägheitsmoments ist grün markiert (von links unten nach rechts oben).*

Elliptische, flache Bierdeckel haben drei unterschiedlich große Hauptträgheitsmomente, das Größte in der Zylinderachse (blaue Linie, Abbildung 5). Die beiden dazu senkrechten Hauptträgheitsmomente sind kleiner. Die Achse des kleinsten Hauptträgheitsmoments fällt mit der großen Achse *a* der Ellipse zusammen. Stößt man einen solchen Bierdeckel senkrecht zu seiner Längsachse an, rotiert er stabil. Instabil ist er bei Rotation um die andere Achse. Das lässt sich mit elliptischen Bierdeckeln sofort praktisch demonstrieren. Vergleichbares gilt für rechteckige Bierdeckel. Leider sind elliptische und rechteckige Bierdeckel seltener.

Das Trägheitsmoment des in Abbildung 5 gezeigten, elliptischen Bierdeckels (m = 0,0056 kg) beträgt bei Drehung durch den Schwerpunkt und um die große Halbachse a (= 0,065 m): $I_a = 10^{-6}$ kgm^2; bei Drehung um die kleine Halbachse b (= 0,046 m): $I_b = 2 \cdot 10^{-6}$ kgm^2; bei Drehung um die Achse senkrecht zur Bierdeckelebene: $I_z = I_a + I_b = 3 \cdot 10^{-6}$ kgm^2. Die Trägheitsmomente sind also deutlich unterschiedlich, was sich in einer stabilen Rotation um die große Halbachse (kleinstes Trägheitsmoment) auswirkt.

Die Engländer Johnston und Lucas haben den Bierdeckelsalto in einem sehr unterhaltsam zu lesenden Artikel dargestellt und dabei ein besonderes Augenmerk auf die Konstruktion eines stabil rotierenden und außerdem noch gebrauchstüchtigen Bierdeckels gerichtet [4]. Herausgekommen ist ein rechteckiger Bierdeckel mit schmetterlingsähnlichen Seitenflügeln [5].

Bierdecksaltos als Spiel

Eine weit verbreitete Variante besteht darin, einen – einzigen - Bierdeckel von einer Tischkante hochzuschnellen und wieder aufzufangen. Messungen ergeben, dass die Hochschnellgeschwindigkeit der Finger etwa 2 bis 3 m/s beträgt. Ein Bierdeckel liegt dann sicher auf einer Tischkante, wenn sich der Schwerpunkt noch gerade auf dem Tisch befindet. Um schmerzhaften Erfahrungen am massiven Tischrand zu entgehen, berühren die Finger den Bierdeckel relativ nahe am Rand des Bierdeckels, jedenfalls meist nicht an einer Stelle, die dem kritischen Abstand a_{krit} aus der Theorie entspricht. Für das Auffangen ist es sogar günstiger, den Bierdeckel am Rand zu berühren, da er sich dann weniger schnell dreht. Darüber hinaus berühren die Finger beim Hochschnellen den Rand des Bierdeckels, bis er soweit gedreht ist, dass die Finger abgleiten. Es handelt sich also nicht um einen kurzen Stoß, wie in der Theorie behandelt. Dennoch gibt die Theorie Näherungswerte. Aus Videos lässt sich entnehmen, dass eine halbe Drehung des Bierdeckels (180°) etwa 90 ms nach Beginn der Berührung passiert ist, eine ganze Drehung (360°) nach etwa 180 ms. Die schnellsten Reaktionszeiten beim Menschen (Start 100 m-Läufer) liegen bei 100 ms, beim Reagieren auf einen plötzlich auftauchenden Reiz etwa bei 200 ms (z.B. auf Leuchtsignal Taster drücken (muskuläre Reaktion)). Mit zunehmendem Alter nimmt sie zu, kann jedoch in jedem Alter durch Training verbessert werden. Das Auffangen eines Bierdeckels nach einer 180°-Drehung (90 ms) geht relativ einfach. Mit der Reaktionszeit von eher normalen Menschen ist das nicht zu erklären. Hier taucht ja auch nicht ein Reiz plötzlich neu auf, sondern man weiß schon, was ablaufen wird. Etwas schwieriger ist das Auffangen bei einem kompletten Salto (360°). Da muss ein bewusster und damit zeitraubender Denkvorgang stattfinden, wann das Zugreifen stattfindet. Noch deutlicher wird das bei einem anderthalbfachen (540°) oder zweifachen Salto (720°).

Beispiele:

Das Video Bierdeckelsalto2_180_420fps.m4v ist aufgenommen mit 420 fps (frames per second). Es handelt sich hier um drei übereinander geklebte, quadratische Bierdeckel (m_{gesamt} = 15,4 g) mit einer Kantenlänge von 9cm. Eine halbe Drehung (180°) ist nach 86 ms (ω = 36,5 s^{-1}) erreicht (Abbildung 6). Die Fingerspitze hat im Moment der Bierdeckelberührung eine Geschwindigkeit von v_p = 2,8 m/s. Diese Geschwindigkeit bleibt nach Berührung des Bierdeckels bis kurz nach dem Loslösen gleich. Der Stoß findet nicht im kritischen Punkt, sondern weiter zum Rand hin statt.
Der Schwerpunkt des Bierdeckels (rote Markierung) hat bis zum Abheben des aufliegenden Randes (da lösen sich zugleich die Finger vom Bierdeckel) eine Geschwindigkeit von v_s = 1,6 m/s, danach im freien Flug etwa v_s = 1,4 m/s. Im weiteren nimmt die Geschwindigkeit bis zum Kulminationspunkt natürlich ab.

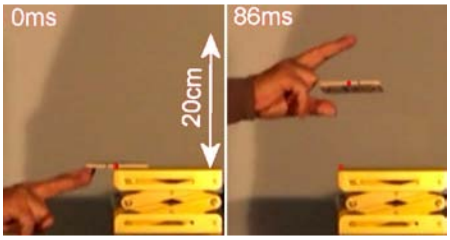

Abb. 6: Auffangen eines Bierdeckeltrios nach einem halben Salto (180°).

Das Video Bierdeckelsalto2_360_420fps.m4v ist ebenfalls aufgenommen mit 420 fps; Bierdeckel wie vorstehend. Eine volle Drehung (360°) wird nach 167 ms (ω = 37,6 s^{-1}) erreicht (Abbildung 7). Die Fingerspitze hat hier eine höhere Geschwindigkeit von v = 3,6 m/s. Der Schwerpunkt des Bierdeckels (rote Markierung) hat bis zum Abheben des Randes (da lösen sich auch ungefähr die Finger vom Bierdeckel) eine Geschwindigkeit von v_s = 2,1 m/s, danach im freien Flug etwa v_s = 1,8 m/s. Trotz höherer Fingerspitzengeschwindigkeit ist die Winkelgeschwindigkeit kaum größer als im vorgehenden Fall.

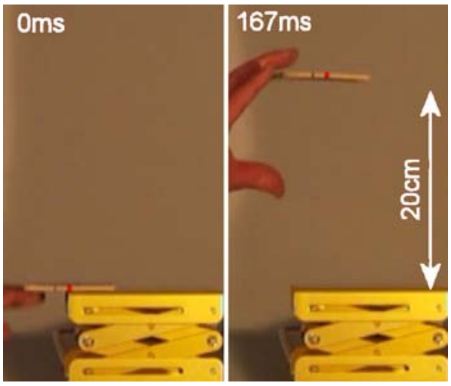

Abb. 7: Auffangen eines Bierdeckeltrios nach einem ganzen Salto (360°).

Eine besondere Herausforderung für Anhänger von Bierdeckelsaltos besteht darin, mehrere übereinander gelegte – und nicht zusammen geklebte - Bierdeckel nach einem halben Salto wieder aufzufangen. Geordnet übereinander gelegt sieht das aus wie ein Zylinder oder ein Quader. Unsere Theorie gilt für diesen Fall explizit nicht. Beim Hochstoßen so eines Bierdeckelblocks verschieben sich die Bierdeckel meist noch gegeneinander. Das Guinness Buch der Rekorde verzeichnet, dass auf diese Weise 112 übereinander gelegte Bierdeckel aufgefangen wurden [6]. Bei einer Dicke eines einzelnen Bierdeckels von 1,5 mm ist das ein Turm von etwa 17 cm. Das ist selbst mit einer großen Hand nur äußerst knapp zu halten.

Stichwörter (bei Google oder YouTube)

Bierdeckel trick, beermat, flipping, flip trick, beer coaster

Literatur und weblinks

[1} Robert Sputh, „Verfahren zur Herstellung von Holzfilzplatten oder Holzfilzdeckeln, Kaiserliches Patentamt, Patentschrift Nr. 68499, 1892

[2] Casio Exilim EX-FH100, Aufnahmen mit 420fps haben eine Auflösung von 224x168 Pixeln

[3] www.design-simulation.com/ip/index.php

[4] Johnston, Ian und Lucas, Hazel: Smash, Grab and Touchdown: A Measure of Flippancy, Oxford 2003, http://motivate.maths.org/conferences/conf56/flipmats.pdf

[5] http://news.bbc.co.uk/2/hi/science/nature/3235091.stm

[6] www.guinnessworldrecords.com/world-records/most-beer-mats-flipped

Zusammenfassung:

Ein beliebtes Spiel mit Bierdeckeln besteht darin, einen auf eine Tischkante zu legen, von unten mit den ausgestreckten Fingern hochzuschnellen und dann nach einem oder mehreren Saltos zwischen Finger und Daumen wieder aufzufangen. Physikalisch gesehen, übt man einen Stoß auf den Bierdeckel aus. Die Anwendung von Impuls- und Drehimpulssatz führen zu einfachen Abschätzungen zur Mechanik des Bierdeckelsaltos. Mit Physiksimulationsprogrammen lässt sich dieses Experiment nachvollziehen. High-speed-videos ergänzen Theorie und Simulation.

Wir danken folgenden Kollegen für Mithilfe und Diskussion: Prof. Michael Vollmer (Fachhochschule Brandenburg), Dr. Karl Dressler (Techn. Univ. München)

Zusatzmaterialien

Theorie zum Bierdeckelsalto

Betrachten wir zunächst das vergleichbare System in Abbildung 1z: Auf einen Stab, der im Drehgelenk A ruhend aufgehängt ist, wirkt ein kurzer horizontaler Stoß. Während des Stoßes übt das Lager die Kraft A_x auf den Stab aus. Das Vorzeichen von A_x wird erst in Gleichung (4) bestimmt.

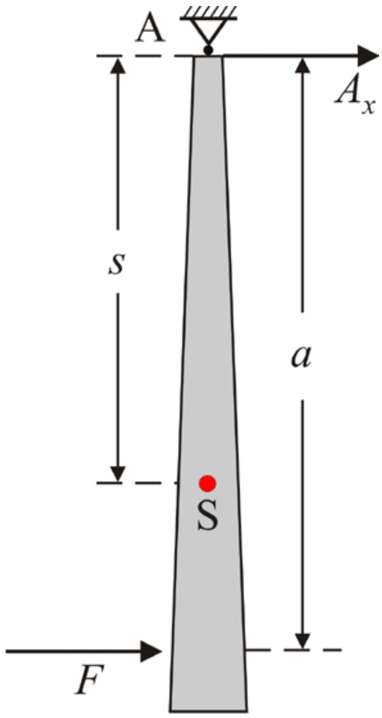

Abb. 1z: *Ein kurzer Kraftstoß wirkt auf den hängenden Stab. Das Lager A übt während des Stoßes auf den Stab die horizontale Kraft A_x aus.*

Das zweite Newtonsche Axiom $F(t) = \dot{p}(t)$ führt nach einer Integration über die Zeit auf

$$\hat{F} := \int_0^t F(t')\,dt' = \int_0^t \dot{p}(t')\,dt' = p(t) - p(0)$$

Demnach ist das Zeitintegral $\hat{F}$ der Kraft – „<u>Kraftstoß</u>“ oder „<u>Stoßkraft</u>“ genannt – gleich der Impulsänderung.

Nach Abb. 1z liefert die Zeitintegration des Schwerpunktsatzes:

$$\int_0^T \left[F(t) + A_x(t)\right] dt = \hat{F} + \hat{A}_x = m\,v_S \qquad (1)$$

mit v_S = Schwerpunktgeschwindigkeit direkt nach dem Schlag
T = Stoßdauer

In gleicher Weise liefert die Zeitintegration des Drehimpulssatzes:

$$I_S\,\omega = (a-s)\int_0^T F(t)\,dt - s\int_0^T A_x(t)\,dt$$

$$I_S\,\omega = (a-s)\hat{F} - s\hat{A}_x \underset{\uparrow \atop \text{Gl.}(1)}{=} a\hat{F} - s\,m\,v_S \qquad (2) \qquad (2)$$

mit ω = Winkelgeschwindigkeit des Stabes unmittelbar nach dem Kraftstoß
I_S = Trägheitsmoment des Stabes für Drehungen um den Schwerpunkt

Zusammen mit der kinematischen Beziehung

$$v_S = s\,\omega \qquad (3)$$

haben wir drei Gleichungen für die drei Unbekannten v_S, ω, $\hat{A}_x$. Mit dem Steinerschen Satz folgt:

$$\hat{A}_x = m\,v_S\left(1 - \frac{I_S}{m\,a\,s} - \frac{s}{a}\right) \underset{\uparrow \atop I_A = I_S + m s^2}{=} m\,v_S\left(1 - \frac{I_A}{m\,a\,s}\right) \qquad (4)$$

Folglich ist die Lagerkraft A_x genau dann Null, wenn

$$a = \frac{I_\mathrm{A}}{m\,s} =: a_\mathrm{krit} \tag{5}$$

Der Angriffspunkt des Kraftstoßes $\hat{F}$, für den die Lagerkraft A_x verschwindet, heißt im Maschinenbau „Stoßmittelpunkt“. Wird ein drehbar gelagerter Körper in diesem Punkt geschlagen, so treten im Lager A keine zusätzlichen Kräfte auf. Beim Hammer und beim Tennisschläger werden die Griffe so geformt, dass beim Schlagen möglichst geringe Stoßkräfte in der Hand auftreten. Lager in Maschinen werden so konstruiert, dass Stöße keine Lagerreaktionen verursachen. Wenn der Stab in Abb. 1z frei pendelt, so ist die Länge a_krit die reduzierte Pendellänge.

Für $a > a_\mathrm{krit}$ bzw. $a < a_\mathrm{krit}$ ist $A_x > 0$ bzw. $A_x < 0$, d. h. das Lager in Abbildung 1z übt eine Kraft nach rechts bzw. nach links auf den hängenden Stab aus.

Wir kommen nun auf den dünnen Bierdeckel an der Tischkante zurück. Da der Tisch in Punkt A (siehe Abb. 1) nur eine Kraft nach oben ausüben kann, folgt aus den vorangehenden Rechnungen mit $s = l/2$ sofort:

Für $a < a_\mathrm{krit} = \dfrac{2\,I_\mathrm{A}}{m\,l}$ *hebt der Bierdeckel sofort vollständig von der Tischplatte ab.*

Für $a > a_\mathrm{krit} = \dfrac{2\,I_\mathrm{A}}{m\,l}$ *bleibt der linke Rand des Deckels anfangs noch auf dem Tisch liegen.*

Für einen quadratischen Bierdeckel mit Seitenlänge *l* (rechteckig mit der kurzen Kantenlänge *l* senkrecht zur Tischkante) bzw. einen runden Bierdeckel mit Radius $R = l/2$ bzw. einem elliptischen Bierdeckel mit der kurzen Halbachse *b* (kleine Halbachse senkrecht zur Tischkante) folgt aus Gl. (5):

$$a_\mathrm{krit}^\mathrm{Quader} = \frac{\frac{1}{12} m\,l^2 + m\left(\frac{l}{2}\right)^2}{m\frac{l}{2}} = \frac{2}{3}\,l \qquad a_\mathrm{krit}^\mathrm{Kreis} = \frac{\frac{1}{4} m\,R^2 + m\,R^2}{m\,R} = \frac{5}{4}\,R = \frac{5}{4}\,b \tag{6a/b}$$

Anmerkung: Das Trägheitsmoment eines quadratischen Quaders mit der Masse *m*, der Kantenlänge *l* und der Höhe *h* bezüglich einer Drehung durch den Schwerpunkt und einer Achse parallel zu einer Kante beträgt $I_\mathrm{Quad} = \frac{1}{12} m\,(l^2 + h^2)$. Wenn *h<<l* (flacher, quadratischer Bierdeckel) ergibt sich $I_\mathrm{Quad} = \frac{1}{12} m\,l^2$.

Das Trägheitsmoment eines elliptischen Zylinders mit der Masse m, den Halbachsen *a* und *b* und der Höhe *h* bezüglich einer Drehung durch den Schwerpunkt und um die Halbachse *a* beträgt $I_\mathrm{eZyl} = \frac{1}{12} m\,(3b^2 + h^2)$.

Wenn *h<<b* (flacher, elliptischer Bierdeckel) ergibt sich $I_\mathrm{eZyl} = \frac{1}{4} m\,b^2$. Für einen kreisförmigen Zylinder wird *b* durch den Radius *R* ersetzt.

Wir untersuchen nur den einfacheren Fall $a < a_{\text{krit}}$, bei dem der *Bierdeckel sofort vollständig vom Tisch abhebt* und der Schwerpunkt S des Bierdeckels senkrecht hoch fliegt. Es gelten die Gleichungen (1) und (2) mit $A_x = 0$ und $s = R$ bzw. $s = l/2$:

$$\hat{F} = m\,v_{\text{S}} \tag{7}$$

$$I_{\text{S}}\,\omega = \left(a - \frac{l}{2}\right)\hat{F} \underset{\text{Gl.(7)}}{\overset{\uparrow}{=}} \left(a - \frac{l}{2}\right) m\,v_{\text{S}} \tag{8}$$

Gl. (3) gilt nicht mehr.

Der Angriffspunkt P der Kraft *F* hat direkt nach dem Stoß die Geschwindigkeit

$$v_{\text{P}} = v_{\text{S}} + \omega\left(a - \frac{l}{2}\right) = v_{\text{S}}\left[1 + \left(a - \frac{l}{2}\right)^2 \frac{m}{I_{\text{S}}}\right] \tag{9}$$

Da der Bierdeckel sehr leicht ist, ist diese Geschwindigkeit gleich der Geschwindigkeit der Finger vor dem Stoß.

Aus Formel (8) und (9) lässt sich die Winkelgeschwindigkeit für $a \le a_{krit}$ ableiten; sie erreicht ihr Maximum für $a = a_{krit}$.

$$\omega = v_{\text{P}}\left(a - \frac{l}{2}\right) \Big/ \left[\frac{I_{\text{S}}}{m} + \left(a - \frac{l}{2}\right)^2\right] \tag{10}$$

Mit den Werten aus Formel 6a, b ergibt sich für $a = a_{krit}$

$$v_{\text{S}}^{\text{Quadr.}} = \frac{3}{4} v_{\text{P}} \qquad \text{und} \qquad v_{\text{S}}^{\text{Kreis}} = \frac{4}{5} v_{\text{P}} \tag{11a, b}$$

Friedhelm Kuypers, geb. 1949, Studium der Physik in Münster, Bonn, Freiburg, dort Promotion in theoretischer Physik. Seit 1986 Professor für Physik an der Ostbayrischen Technischen Hochschule Regensburg. Autor mehrerer Bücher, u.a. “Klassische Mechanik“.

friedhelm.kuypers@oth-regensburg.de