

Schwingende Puppen und Wolkenkratzer

Wohl nur Physiker oder Ingenieure mit ihren spielerischen Neigungen erkennen bei einer Puppe eine Verbindung zur alltäglichen Anwendung der Schwingungstilgung. Diese Technik hat eine große Bedeutung und wird auch in Wolkenkratzern zur Schwingungsdämpfung bei Erdbeben oder starken Winden eingesetzt.

Vor einigen Jahren war die in Abbildung 1 gezeigte Puppe unter dem Namen Flip-Flop in Spielwarenläden erhältlich. An einer langen, dünnen Feder von etwa 55 cm Länge hängt der Kopf der Puppe. Am Kopf wiederum sind die Füße mit einer zweiten, kürzeren und dickeren Feder von etwa 20 cm Länge befestigt. Hängt die obere Feder an einem festen Haken und zieht man an den Füßen, so schwingen Kopf und Füße nach dem Loslassen in gekoppelten Bewegungen, sozusagen ein Mobile mit schwer vorhersagbaren Ausschlägen. Das ist die übliche Art der Anregung.

Hält man jedoch das Ende der oberen Feder in der Hand und bemüht sich mit ihr möglichst harmonische vertikale Schwingungen zu vollführen, so bewegen sich bei einer Schwingungsdauer von etwa 0,6 s menschliche Hand und Puppenfüße mit relativ großen Amplituden, während der Puppenkopf fast ganz ruhig bleibt. Das ist ein Beispiel für die so genannte Schwingungstilgung (englisch Tuned Mass Damping, TMD).

Diese Technik kommt zum Einsatz, wenn schwingende Konstruktionsteile, wie Maschinenfundamente, Karosserieteile von Autos oder Brücken, durch eine Schwingung mit konstanter Frequenz angeregt werden wie es beispielsweise durch sich periodisch ablösende Windströmungen der Fall sein kann. Dann können die Schwingungen theoretisch vollkommen getilgt werden, indem man einen geeignet abgestimmten zweiten Schwinger an den ersten ankoppelt [1]. Bei richtiger Abstimmung schwingt die zweite Masse (auch Gegenschwinger genannt; in unserem Fall die Puppenfüße) in Gegenphase mit der Erregung (Hand an der Aufhängeöse). Sie schwingt gerade mit einer solchen Amplitude, dass die von der zweiten Feder auf den ersten Schwinger (Puppenkopf des Flip-Flop) ausgeübte Kraft der über die erste Feder wirkenden Erregerkraft das Gleichgewicht hält (siehe „Mathematik der Schwingungstilgung“). Systeme dieser Art nennt man auch passiv getilgt, da keine aktive Regelung vorhanden ist.

Im Falle der Puppe ist es vermutlich purer Zufall, dass die Massen und Federn so aufeinander abgestimmt sind, dass sich eine konkrete Schwingungstilgung ergibt. Hier haben die Federkonstanten beide etwa eine Größe von $c_1 = c_2 = 5,1 \text{ Nm}^{-1}$. Die Masse des Kopfes beträgt $m_1 = 0,16 \text{ kg}$, die der Füße $m_2 = 0,06 \text{ kg}$. Damit ergibt sich entsprechend der Ableitung in „Mathematik der Schwingungstilgung“ für

$$\omega_2 = \sqrt{c_2/m_2} = \sqrt{5,1/0,06} = 9,2 \text{ s}^{-1}.$$

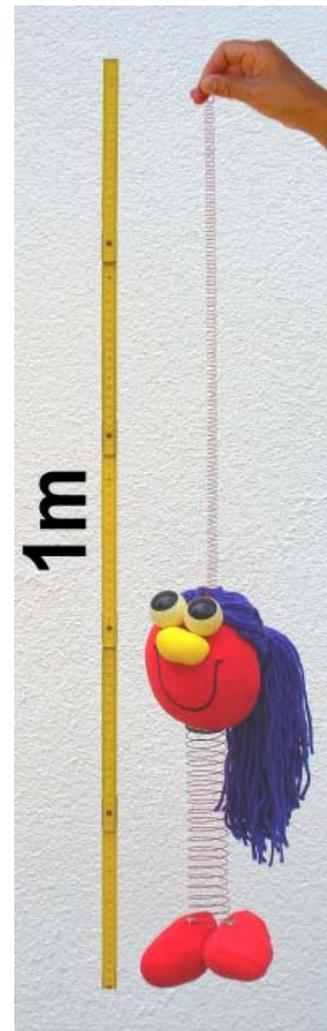


Abb. 1 Die Puppe Flip-Flop mit zwei Federn.

Für die Schwingungsdauer T resultiert daraus $T = 0,68$ s, was grob mit der gemessenen Dauer übereinstimmt. Aus (5) in „Mathematik der Schwingungstilgung“ ergibt sich in diesem Fall wegen $c_1 = c_2$ sogar $X_2 = -X_e$. Das heißt, die Puppenfüße schwingen mit der gleichen Amplitude wie die Erregung, allerdings gerade in Gegenphase. Eine genauere Analyse dieses Beispiels ist hier aufgrund der nicht genau eingestellten und einstellbaren Parameter bei der Puppe wenig sinnvoll. Diese ist auch insofern untypisch, als das Verhältnis von Tilgermasse (Füße) zum Hauptsystem (Kopf) relativ groß ist.

Eine etwas genauere Betrachtung eines mit Federn gedämpften Systems ergibt Folgendes: Lenkt man die Aufhängung einer Feder, an der eine Masse hängt, harmonisch aus, so ergibt sich die in Abbildung 2 gezeigte Resonanzkurve. Hier stellt die schwarze Kurve die Auslenkung des Hauptsystems als Verhältnis der anregenden Frequenz f zur Eigenfrequenz f_0 dieses Systems dar.

Wird nun an das Hauptsystem ein Tilger mit Feder und Dämpfung angebracht, so kann bei geeigneter Auslegung der Parameter das ursprüngliche Maximum der

Auslenkung (Resonanz) sehr stark vermindert (getilgt) werden. Die Eigenfrequenz der Tilgermasse mit ihrer Tilgerfeder wird auf die zu eliminierende Frequenz eingestellt. Dabei kann der Tilger gegebenenfalls große Amplituden mit erheblichen Kräften am Federansatzpunkt beim Hauptsystem aufweisen. Er entzieht bei dieser Frequenz dem Hauptsystem Schwingungsenergie.

Das wird allerdings erkauft mit zwei neuen Eigenfrequenzen kleinerer Amplitude oberhalb und unterhalb der Tilgereigenfrequenz (rote Kurve in Abbildung 2). Diese entstehen aus der Kombination Hauptsystem mit Tilger und zwar aus der gleichphasigen und der gegenphasigen Schwingung von Hauptsystem mit Tilger. Bei diesen Frequenzen ergibt sich für das Hauptsystem prinzipbedingt eine Verstärkung der Schwingungen. Die wiederum kann man durch zusätzliche Dämpfung verkleinern.

Durch Variation der Tilgerparameter lässt sich die Schwingungskurve erheblich beeinflussen. Hier wurde zunächst nur der einfachste Fall einer monofrequenten, harmonischen Anregung betrachtet. Die Wirklichkeit ist meist erheblich komplexer, so dass für die Auslegung der Tilgerparameter aufwendige Messungen und Rechnungen notwendig sind.

Schwingungstilger in Bauwerken

Ein nicht ganz kleiner Schritt führt vom Spielzeug zum Bauwerk. Die Millenniumsbrücke des Stararchitekten Sir Norman Foster in London (Abbildung 3) ist ein bekanntes Beispiel für eine schwingende Brücke. Bis zu 2000 Personen gingen bei der Eröffnung im Jahre 2000 gleichzeitig über die Brücke. Dabei verfielen sie unbewusst in einen annähernd synchronen Gang, und die Brücke begann mit einer Frequenz etwas unterhalb von 1

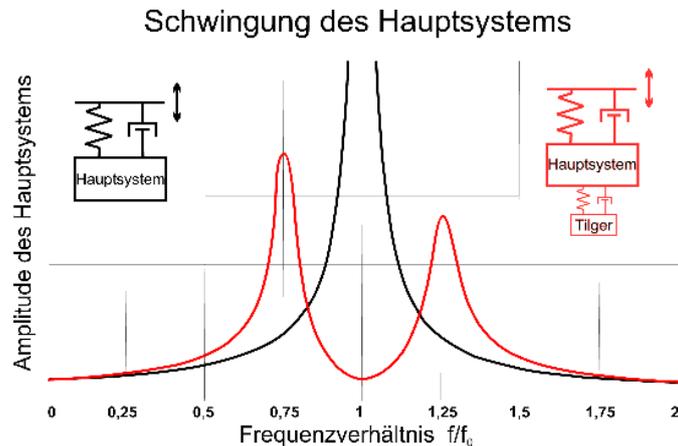


Abb. 2: Schwingungen eines Systems ohne und mit Tilger: f_0 ist die Resonanzfrequenz des Hauptsystems ohne Tilger, f die Frequenz des Hauptsystems ohne (schwarz) und mit Tilger (rot)



Abb. 3: Die Millenniumsbrücke in London überquert die Themse. Im Hintergrund die Saint Paul's Cathedral.

H_z sowohl vertikal als auch horizontal zu schwingen. Die Brücke war zu keiner Zeit einsturzgefährdet, den Fußgängern wurde höchstens schlecht. Sie wurde daraufhin gesperrt.

Dem Vorgang lag eine unzureichende Konstruktion zugrunde. Das Phänomen der Resonanzanregung bis hin zur Resonanzkatastrophe ist aus der Überquerung von Brücken von im Gleichschritt gehenden Soldaten bekannt. Die deutsche Spezialfirma Gerb konnte die Millenniumsbrücke mit Schwingungstilgern in vertikaler und horizontaler Richtung stabilisieren. Jetzt können bis zu 3000 Personen in Marschformation die Brücke gefahrlos überqueren [2].

Ein weiteres berühmtes und vor Ort auch zu besichtigende Beispiel ist der im Jahre 2003 fertiggestellte Wolkenkratzer Taipei 101 in Taiwan, in dem die Ziffer 101 für die Anzahl der Stockwerke steht. Seine Höhe samt Antennen beträgt 509 m, das Dach ohne Antennen schließt bei 448 m ab. Dieses Gebäude enthält gleich drei Schwingungstilger, die durch starken Wind angeregte transversale Schwankungen dämpfen. Kurzzeitig einwirkende Stöße durch Erdbeben werden damit jedoch nicht gedämpft. Der größte Tilger ist eine aus Stahlplatten zusammengesetzte Kugel mit etwa 5,5 m Durchmesser (Abbildung 4). Er besitzt eine Masse von 662 Tonnen und ist an 42 m langen Stahlseilen aufgehängt, die vom 92. bis zum 88. Stockwerk reichen (Abbildung 5). Das ist der zur Zeit größte Schwingungstilger der Welt. Eine noch größere Tilgermasse wäre grundsätzlich von Vorteil. Dem stehen aber erkennbar Grenzen der Belastbarkeit des Gebäudes entgegen. Ein Video zeigt das Tilgerpendel in Aktion während eines Taifuns [3]



Abb. 4 Schwingungstilgerpendel im Taipei 101.

Das Gebäude schwankt gelegentlich bis zu 35 cm hin und her. Bei Supertaifuns, die im Durchschnitt nur alle hundert Jahre erwartet werden, inzwischen aber immer häufiger vorkommen, sind sogar Amplituden von 150 cm denkbar. Der Tilger dämpft die Schwingungen um bis zu 40%. Mit (7) ergibt sich eine Schwingungsdauer von etwa 13s.

Die Schwingungsdauer der ersten Eigenfrequenz von hohen Gebäuden lässt sich im Übrigen nach DIN 1055-4 sehr grob mit folgender Formel abschätzen[4]:

$T_1 = H/46$ (T in Sekunden, H in Meter). Relevant hierfür ist die Bauwerkshöhe bis zur Oberkante der aussteifenden Tragstruktur, Aufbauten und Antennen werden vernachlässigt. Für das Taipei 101 resultiert in Anbetracht der groben Abschätzungen in passabler Übereinstimmung zu obiger Schwingungsdauer $T_1 = 9,7s$.

Auslenkungen von $s = 35$ cm ergeben horizontale Beschleunigungen von etwa $a = \omega^2 \cdot s \approx 0,2ms^{-2}$, entsprechend etwa 1/50 der Erdbeschleunigung. Das ist bei kurzer Einwirkungszeit eine für den Menschen leicht verträgliche Größe, bei längerer Einwirkung kann



Abb. 5 Der Wolkenkratzer Taipei 101 mit dem maßstabsgerecht eingezeichneten Schwingungstilger.

Abb. 6 Berliner Fernsehturm.

es zu Übelkeit kommen. Vermutlich wird das oberste Stockwerk bei Sturm eher nicht überfüllt sein.

In Deutschland ist der noch zu DDR-Zeiten erbaute Berliner Fernsehturm (Abbildung 6) mit einem in der Turmspitze aufgehängten 1,5 t schweren Schwingungstilgerpendel versehen. Die Gesamthöhe des Turms bis zur Antennenspitze beträgt 368 m, der Betonschaft reicht bis in 250 m Höhe. Schwingungsdauern von 7 bis 10 s werden angegeben. Mit der Näherungsformel ergibt sich $T_1 = 5,4$ s.

In der Höhe des Turmcafés (208 m) betragen die Auslenkungen bei durchschnittlichen Windstärken 15 cm, an der Antennenspitze bis zu 60 cm. Rechnet man mit $T = 7$ s, so ergeben sich kaum noch spürbare Beschleunigungen von etwa $0,1 \text{ ms}^{-2}$. Da verändert sich der Kaffeespiegel in der Tasse nur unmerklich.

Literatur und weblinks

- [1] K. Magnus, K. Popp, Schwingungen, Verlag B.G. Teubner, Stuttgart 2005.
- [2] H. Bachmann, Lebendige Fußgängerbrücken - eine Herausforderung, Bautechnik 2004, 227.
www.gerb.com/images/both/projektbeispiele/pdf/millennium_bridge.pdf
- [3] www.taipei-101.com.tw/en/DB/index.asp?id=db01
- [4] DIN 1055-4, Einwirkungen auf Bauwerke, Teil 4: Windlasten, 2005.

Schlagwort Schwingungstilger (auch in Englisch: tuned mass damper) bei Wikipedia:

<http://de.wikipedia.org/wiki/Schwingungstilger>

Firma **Gerb** Schwingungsisolierungen

<http://www.gerb.com/de>

Berliner Fernsehturm

<http://www.berlinerfernsehturm.de>

Aktiv zu beeinflussende Applets zur Schwingungstilgerung

<http://demonstrations.wolfram.com/TunedMassDamper/>

Mit dem Stichwort tuned mass damper findet man bei YouTube mehrere Beispiele, speziell auch zum Schwingungstilgerpendel in Aktion. Stichwort: taipei 101 damper

Ein Video der in Abbildung 1 gezeigten Puppe ist anzusehen unter:

<http://www.ucke.de/christian/physik/ftp/lectures/flipflop4.wmv>

Mathematik der Schwingungstilgung

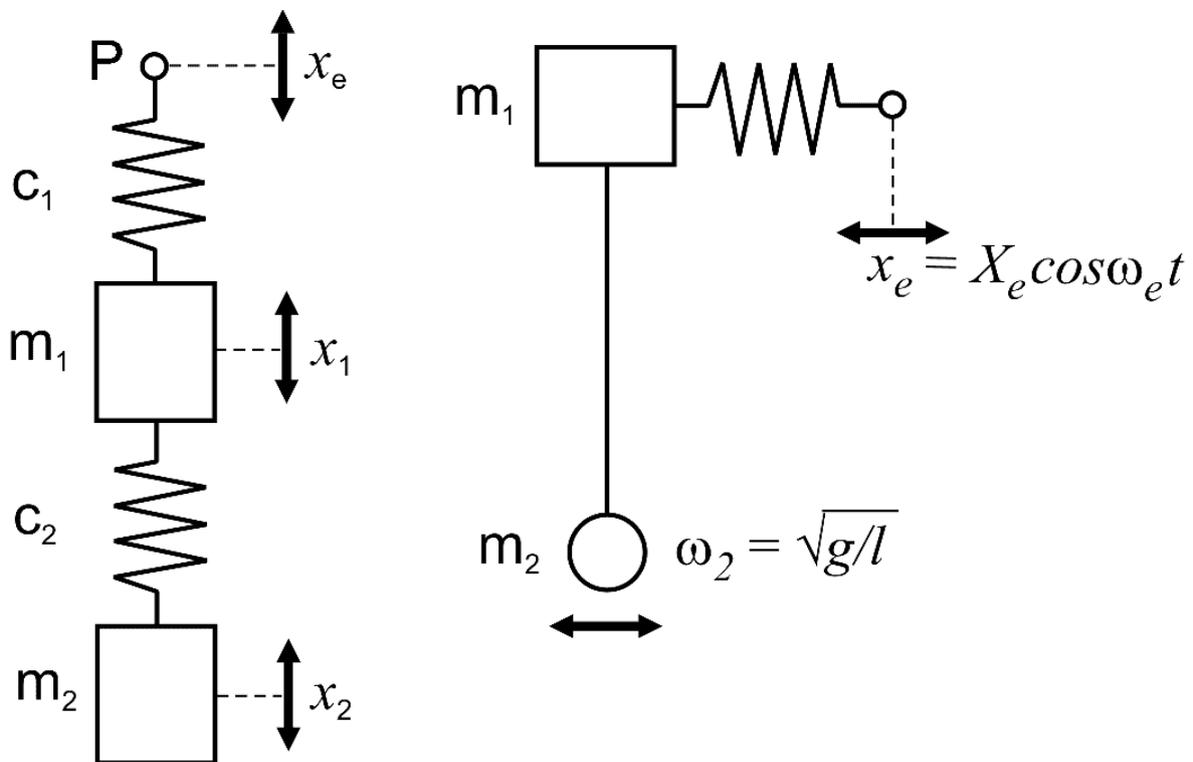


Abb. 7 Schema von Schwingungstilgerpendeln

In der Abbildung 7 links ist ein System mit zwei Federn und zwei Massen dargestellt. Der Aufhängepunkt P bewege sich mit der Amplitude X_e und der Frequenz ω_e harmonisch auf und ab. Das lässt sich so schreiben

$$(1) \quad x_e = X_e \cos \omega_e t$$

Ohne dämpfende Einflüsse ergeben sich aus dem 2. Newton'schen Gesetz unmittelbar folgende Differentialgleichungen

$$(2) \quad m_1 \ddot{x}_1 = \Sigma F_1 = -c_1(x_1 - x_e) - c_2(x_1 - x_2)$$

$$(3) \quad m_2 \ddot{x}_2 = \Sigma F_2 = -c_2(x_2 - x_1)$$

Mit den Abkürzungen

$$\frac{c_1 + c_2}{m_1} = \omega_1^2 \quad \frac{c_2}{m_2} = \omega_2^2 \quad \frac{m_2}{m_1} = \mu \quad \frac{c_1}{m_1} = \omega_0^2$$

lautet die Lösung (hier sind einige Rechenschritte ausgelassen)

$$(4) \quad x_1 = X_1 \cos \omega_e t = \frac{\omega_0^2 (\omega_2^2 - \omega_e^2) X_e}{(\omega_1^2 - \omega_e^2)(\omega_2^2 - \omega_e^2) - \mu \omega_2^4} \cos \omega_e t$$

$$(5) \quad x_2 = X_2 \cos \omega_e t = \frac{\omega_0^2 \omega_2^2 X_e}{(\omega_1^2 - \omega_e^2)(\omega_2^2 - \omega_e^2) - \mu \omega_2^4} \cos \omega_e t$$

Die Massen m_1 und m_2 schwingen mit der gleichen Frequenz ω_e wie die erregende Schwingung. Die Amplituden ergeben sich aus den Gleichungen (4) und (5). Die Amplitude X_1 der Masse m_1 ist gerade Null für

$$(6) \quad \omega_e = \omega_2 = \sqrt{c_2/m_2} .$$

Durch Variation von c_2 bzw. m_2 ist diese Bedingung i. A. zu erfüllen.

Zu beachten ist, dass diese Rechnung streng nur für eine Frequenz und nur ohne weitere dämpfende Einflüsse gilt. Das entspricht nicht der Realität.

In manchen Bauwerken (Wolkenkratzer, Schornsteine, Brückenpfeiler) ist prinzipiell die aus Abbildung 7 rechts ersichtliche Konstruktion verwirklicht. Die beispielsweise durch Wind zwangserregte Masse m_1 stellt das Bauwerk dar, das durch die schwingende Masse m_2 gedämpft wird, wenn

$$(7) \quad \omega_e = \omega_2 = \sqrt{g/l} .$$

Das ist die bekannte Formel für die Schwingungsdauer eines Pendels. Die Masse kommt in dieser Formel nicht vor. Für die Berechnung der Kräfte ist sie natürlich von Bedeutung.