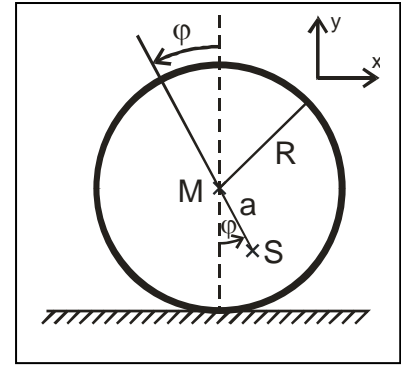


Bewegungsgleichung eines Rollpendels

Die folgende Herleitung stellte uns freundlicherweise Prof. F. Kuypers/Hochschule Regensburg zur Verfügung. Sie ist aufgrund der Benutzung des Lagrange-Formalismus sehr kurz. Eine – längere – Herleitung ohne diesen Formalismus findet sich in dem Buch ‚Klassische Mechanik‘ von Walter Greiner.

Gegeben sei auf einer horizontalen Ebene ein Zylinder bzw. eine Kugel, deren Mittelpunkt und Schwerpunkt sich nur in einer Ebene bewegen. Der Schwerpunkt S liegt im Abstand a vom Mittelpunkt M der Kugel mit dem Radius R . Wird die Kugel um den Winkel φ ausgelenkt, rollt sie hin und her.



Für die Koordinaten des Schwerpunkts gilt:

$$x_S = -R\varphi + a\sin\varphi \quad \text{und} \quad y_S = -a\cos\varphi$$

bzw.
$$\dot{x}_S = -R\dot{\varphi} + a\dot{\varphi}\cos\varphi = \dot{\varphi}(-R + a\cos\varphi) \quad \text{und} \quad \dot{y}_S = -\dot{\varphi}a\sin\varphi$$

Die kinetische Energie ergibt sich als Summe aus Rotationsenergie (I_S = Trägheitsmoment der Kugel um die Schwerpunktsachse) und Translationsenergie (m = Masse der Kugel)

$$T = \frac{I_S}{2}\dot{\varphi}^2 + \frac{m}{2}(a^2\dot{\varphi}^2 - 2aR\dot{\varphi}^2\cos\varphi + R^2\dot{\varphi}^2) = [I_S + m(a^2 + R^2 - 2aR\cos\varphi)]\frac{\dot{\varphi}^2}{2}$$

Die potentielle Energie ist $V = -mgacos\varphi$ (g = Erdbeschleunigung)

Damit ergibt sich die Lagrangefunktion zu

$$L = T - V = [I_S + m(a^2 + R^2 - 2aR\cos\varphi)]\frac{\dot{\varphi}^2}{2} + mgacos\varphi$$

Die Bewegungsgleichung folgt aus
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$$

Es ist
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = [I_S + m(a^2 + R^2 - 2aR\cos\varphi)]\dot{\varphi}$$

und
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = [I_S + m(a^2 + R^2 - 2aR\cos\varphi)]\ddot{\varphi} + 2aRm\sin\varphi \cdot \dot{\varphi}^2$$

und
$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = maR\sin\varphi \cdot \dot{\varphi}^2 - mgasin\varphi$$

Damit lautet die exakte Bewegungsgleichung

$$[I_S + m(a^2 + R^2 - 2aR\cos\varphi)]\ddot{\varphi} + maR\sin\varphi \cdot \dot{\varphi}^2 + mgasin\varphi = 0$$

Eine explizite Lösung existiert nicht. Numerisch lässt sich diese Differenzialgleichung mittels Programmen wie Mathematica, Matlab o. ä. berechnen.

Für kleine Winkel φ ergibt sich die Näherung

$$[I_S + m(R - a)^2]\ddot{\varphi} + mga\varphi = 0$$

Daraus folgt für die Schwingungsdauer T für kleine Winkel φ

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_S + m(R - a)^2}{mga}}$$

Ermittlung des Trägheitsmomentes und der Schwingungsdauer der Geruchseife

Vorhanden ein kleiner Drehteller mit Drillfeder.

Bestimmung dessen Winkelrichtgröße D des Drehtellers mit der Formel

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I_0}{D}} \quad I_0 = \text{Trägheitsmoment Drehteller; } T_0 = 0,8\text{s}$$

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{I_0 + I_1}{D}} \quad I_1 = \text{Trägheitsmoment bekannter Körper, z. B. Quader}$$

bezüglich Achse durch die Mitte

Daraus folgt mit $I_1 = \frac{ma^2}{6}$ Trägheitsmoment gleichseitiger Quader
($m = 20,9\text{g}$; $a = 3,98\text{cm}$; $T_1 = 1,4\text{s}$)

$$D = \frac{4\pi^2 I_1}{T_1^2 - T_0^2} = \frac{4\pi^2}{T_1^2 - T_0^2} \cdot \frac{ma^2}{6} = \frac{4\pi^2}{1,4^2\text{s}^2 - 0,8^2\text{s}^2} \cdot \frac{20,9\text{g} \cdot 3,98^2\text{cm}^2}{6} = 1650\text{gcm}^2\text{s}^{-2}$$

und

$$I_0 = \frac{T_0^2}{4\pi^2} D = 27\text{gcm}^2$$

Die Geruchseife wird mit dem Schwerpunkt zentriert auf die Achse des Drehtellers positioniert.

Aus

$$T_G = 2\pi \sqrt{\frac{I_0 + I_G}{D}} \quad \text{folgt mit } T_G = 3,4\text{s}$$

$$I_G = \frac{T_G^2}{4\pi^2} D - I_0 = \frac{3,4^2\text{s}^2 \cdot 1650\text{gcm}^2\text{s}^2}{4\pi^2} - 27\text{gcm}^2 = 483\text{gcm}^2 - 27\text{gcm}^2 = 456\text{gcm}^2$$

Für die Schwingungsdauer T eines Objektes auf einer horizontalen Ebene gilt für kleine Winkel

$$T_{\text{theor}} = 2\pi \sqrt{\frac{I_G + m_G(R-a)^2}{m_G \cdot g \cdot a}} = 2\pi \sqrt{\frac{456\text{gcm}^2 + 129\text{g}(2,325\text{cm} - 0,425\text{cm})^2}{129\text{g} \cdot 1000\text{cms}^{-2} \cdot 0,425\text{cm}}} = 0,815\text{s}$$

Gemessen wurde aus einem Video $T_{\text{exp}} = 0,83\text{s}$, d.h. im Rahmen üblicher Messunsicherheiten eine sehr gute Übereinstimmung.

Bei einem Winkel von 70° ergibt die Berechnung mit der exakten Differenzialgleichung mit Mathematica $T_{\text{theor}} = 0,94\text{s}$.

Experimentell ergibt sich $T_{\text{exp}} = 0,91\text{s}$.

Die Nichtlinearität so eines Rollpendels ist größer als bei einem Fadenpendel! (Rollpendel $T_{70^\circ}/T_{1^\circ} = 1,15$; Fadenpendel $T_{70^\circ}/T_{1^\circ} = 1,10$)

