Eingereichte Version 6.7.2008 erschienen in: Physik in unserer Zeit **40** (2009), Heft 1, 52-54

Zylinder- und Kugelkreisel

Christian Ucke und Hans-Joachim Schlichting

Mit einfachsten Mitteln lassen sich ungewöhnliche Kreisel aus Plastikzylindern, Holzkugeln und magnetischen Kugeln herstellen, die in unerwartete Bewegungen versetzt werden können. Etwas aufwendigere Versionen zeigen überdies interessante optische Erscheinungen.

Experiment und Beobachtung

Nicht jeder Kreisel sieht aus wie Kreisel und nicht jeder Kreisel wird angedreht wie ein Kreisel. Drückt man mit dem Zeigefinger auf das markierte Ende eines flach auf einer möglichst glatten Unterlage liegenden und mit einer Farbmarke versehenen Hohlzylinders und lässt ihn dabei wegschnippen, dann entsteht eine erstaunliche Bewegungsfigur: Der Zylinder rotiert gleichzeitig um seine eigene Achse und um eine zur Unterlage senkrechte Achse durch die Mitte des Zylinders. Er rollt dabei auf dem Umfang der gegenüberliegenden Seite des angestoßenen Endes ab.

Abb.1: Zylinder als Kreisel. Der rote Zylinder ist massiv, der graue hohl.

Der Zylinder beschreibt zunächst einen deutlich sichtbaren Präzessionskegel der reibungsbedingt zunehmend flacher wird. Gegen Ende des noch immer schnell rotierenden Kreisels sieht man deutlich eine stationäre Kreisfläche mit drei Farbpunkten (Abbildung 2). Das kann kein Zufall sein! Vielmehr verweist die Struktur auf ein dreizähliges Verhältnis der beiden Rotationen zueinander: Tatsächlich ist die Länge L des Zylinders gleich dem Dreifachen seines Durchmessers d. Bei jeder Umdrehung um die senkrechte Achse durch die Mitte des Zylinders rollt er gerade dreimal ab und lässt dementsprechend den roten Punkt mit erstaunlicher Regelmäßigkeit dreimal erscheinen. Abbildung 2 stellt eine Übereinanderlagerung von drei Bildern aus einem Video des kreiselnden Zylinders dar und gibt etwa den visuellen Eindruck wieder, kurz bevor der Zylinder stoppt. Zu Beginn des Andrehens des Zylinders sieht man weniger, eventuell auch nur schnell wechselnde Punkte.

Abb.2: Visueller Eindruck des rotierenden Zylinders.

Massive Zylinder rotieren auf Grund ihres größeren Trägheitsmomentes länger.

Physik des Zylinderkreisels

Unmittelbar nach dem Andrehen ist der Winkel φ zwischen der Zylinderachse und der Ebene noch relativ groß. Dann ist auch die visuelle Erscheinung noch nicht eindeutig und schwieriger zu beschreiben. Bei kleinen Winkeln ($\varphi < 10°$; Abbildung 3) tritt der geschilderte Effekt deutlich in Erscheinung. Das rechtfertigt die folgende Beschränkung der Betrachtung auf

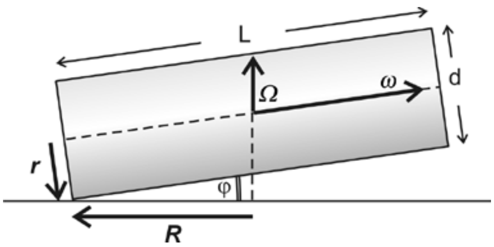

Abb.3: Benennungen beim kreiselnden Zylinder (nach [1]).

kleine Winkel [1].

Der Zylinder rotiert einerseits mit der Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$ um seine Achse und zum anderen präzediert er mit der Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\Omega}$ um eine Achse senkrecht zur Unterlage. Die Geschwindigkeit eines Punktes auf der Zylinderoberfläche setzt sich zusammen aus der Geschwindigkeit $\boldsymbol{v_S}$ aufgrund der Rotation um die Zylinderachse und $\boldsymbol{v_R}$ aufgrund der Rotation um die vertikale Achse (Abbildung 4):

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v_S} + \boldsymbol{v_R} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{R}\,.$$

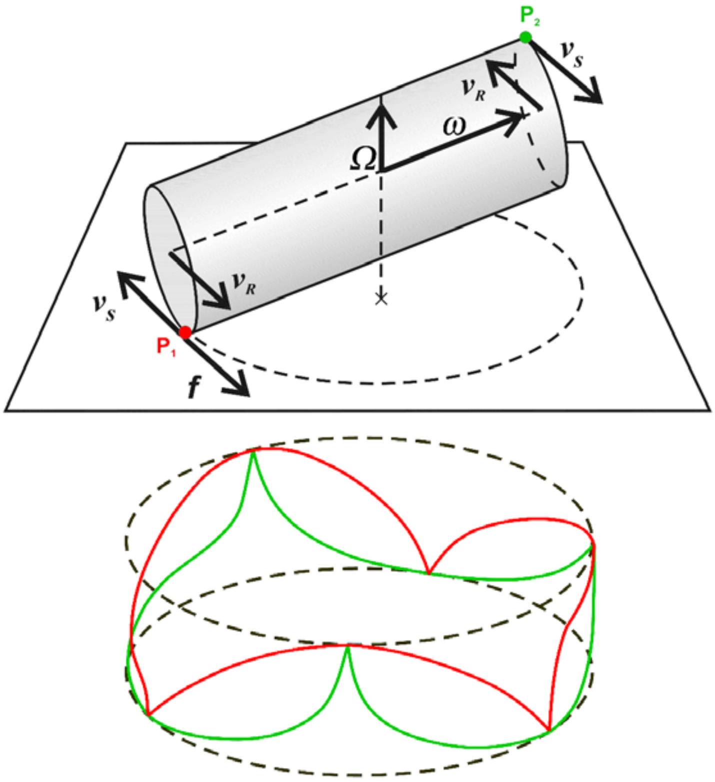

Abb. 4a,b: Die Vektoren der Geschwindigkeit und Winkelgeschwindigkeit beim rotierenden Zylinder (nach [1] verändert) und die Bahnen von Punkten auf der Zylinderoberfläche für $\varphi \approx 0$ und einem Verhältnis von drei von Länge zu Durchmesser des Zylinders .

Mit der Voraussetzung eines kleinen Neigungswinkels φ kann man näherungsweise $R \approx L/2$ setzen. Außerdem ist $r = d/2$.
Beim Andrehen des Zylinders wird die Geschwindigkeit $\boldsymbol{v_S}$ aufgrund des reibenden Wegdrückens größer als die Abrollgeschwindigkeit $\boldsymbol{v_R}$ sein. Die Gleitreibungskraft $\boldsymbol{f}$ aufgrund des Schlupfes wirkt jedoch entgegen der Richtung der Geschwindigkeit $\boldsymbol{v_S}$ und die Bewegung läuft automatisch auf schlupffreies Abrollen hinaus. Der rot gekennzeichnete Punkt P_1 durchläuft eine Zykloide. Eine solche Bewegungsfigur kennt man beispielsweise von einer von der Seite gesehenen und bei Dunkelheit leuchtenden Fahrradpedale, die sich in einem Bogen bis zu einem tiefsten Punkt abschwingt, dort einen Moment zu stehen scheint und sich bogenförmig wieder nach oben bewegt. In der Abbildung 4b ist seine horizontale Relativgeschwindigkeit zur Unterlage beim Durchlaufen der Zykloidenspitze gerade gleich Null ($\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$). Gleiches gilt für den grünen Punkt P_2 am anderen oberen Ende des Zylinders. Aus $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ folgt $\omega = (L/d)\,\Omega$.
Ist das Verhältnis $L/d = 3$, ergibt sich daraus, dass der Zylinder bei einer kompletten Drehung um die vertikale Achse gerade drei Umdrehungen um seine eigene Achse vollführt. Das bedeutet, dass die am oberen Ende des Zylinders befindliche Farbmarke bei jeder vollständigen Drehung des Zylinders um die vertikale Achse dreimal an den gleichen, um 120° versetzten Stellen zum Stillstand kommt und daher kurzzeitig zu sehen ist. Weil diese Stillstände sehr schnell aufeinander folgen, nimmt das menschliche Auge aufgrund seines eingeschränkten zeitlichen Auflösungsvermögens ein Muster aus drei stationären Punkten wahr. Bei kleinen Zylindern mit Durchmessern von etwa 15 bis 20 mm werden etwa einige tausend Umdrehungen pro Minute erreicht. Das ist mit einem Stroboskop leicht zu ermitteln.
Komplizierter werden diese Überlegungen für größere Winkel φ. Es sei dafür auf die unter [1] genannte Literatur verwiesen.

Weitere Experimente

Ist das Verhältnis von Länge zu Durchmesser eines Zylinders gerade gleich eins, ergibt sich aus dem Vorhergehenden, dass eine Farbmarke auf dem Zylinder bei jeder Umdrehung nur genau einmal zu sehen ist. Ein Zylinder mit derartigem Verhältnis ist gar nicht so leicht anzudrehen. Viel einfacher ist es, zwei Kugeln miteinander zu verbinden, die zu einem gleichartigen Effekt führen. Ein solches Objekt wird sogar als Kinderspielzeug bereits mit entsprechenden Farbmarken ausgestattet angeboten (Abbildung 5; Holzkugeln *duo* der italienische Firma Il Leccio [3]; Ø = 25mm). Zwar beträgt der Abstand zwischen den Kugelenden gerade das Doppelte des Durchmessers. Dreht man diese Doppelkugel jedoch mit dem Finger an, rollt sie auf einem Umfang im Abstand von dem halben Kugeldurchmesser ab, so dass sie dem Zylinder mit gleichem Durchmesser und gleicher Länge äquivalent ist.

Abb. 5: Zwei fest miteinander verbundene Holzkugeln bilden einen Kreisel (duo der Fa. Il Leccio; Ø 25mm), ebenfalls Magnetkugeln (Ø10mm)

Mit einigem Geschick lassen sich derartige Holzkugelkreisel selbst herstellen. Man kann natürlich auch drei oder mehr Kugeln miteinander verbinden. Holzkugeln mit Vorbohrungen gibt es in Bastelgeschäften.

Wem auch diese Bastelei zu mühsam ist, kann bei einschlägigen Versandhändlern [4] magnetische Kugeln kaufen, die von selbst zusammen halten. Man muss nur noch eine Markierung anbringen. Es empfehlen sich Durchmesser von mindestens 10mm.
Beim Rotieren im Licht von Leuchtstofflampen ergeben sich auf den reflektierenden Oberflächen der Kugeln hübsche stroboskopische Effekte. Geradezu abgesehen auf einen derartigen optischen Effekt hat es der deutsche Künstler Degen, der ein Set von zusammengeschweißten Kugellagerkugeln mit einem farbigen LED-Wechsellicht unter dem klangvollen Namen ‚Doppelkugelhochgeschwindigkeitsturbolanglaufkreisel' herstellt. Ein Video mit dem optischen Effekt ist unter [5] zu sehen.

Kleinere magnetische Doppelkugeln mit einem Durchmesser von 8 bis 10mm lassen sich auf einer konkaven Unterlage (großes Uhrglas, Rasier-/Kosmetikspiegel, Teller o.ä.) mit Hilfe eines Strohhalmes durch Pusten auf fast 10.000 Umdrehungen pro Minute beschleunigen (Abbildung 6).
Bei genügend großer Drehzahl wird die Magnetkraft nicht mehr ausreichen, die Kugeln zusammen zu halten. Die hohe Drehzahl könnte zu der Vermutung Anlass geben, dass die Kugeln gewehrkugelartig auseinander schießen. Die Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ bei der die Kugeln tangential zu ihrer Bahn davonfliegen, lässt sich aus

$$\boldsymbol{F = mv^2r}$$

berechnen. Setzt man für zwei Magnetkugeln von 8mm

Abb. 6: Magnetkugeln lassen sich mit einem Strohhalm bis fast 10.000 U/min hochdrehen.

 erschienen in: Physik in unserer Zeit **40** (2009), Heft 1, 52-54

Durchmesser und einer Masse von je 2g eine Kraft von 9N ein, so ergibt sich für den Betrag von ***v***:

$$v = \sqrt{\frac{F \cdot r}{m}} \approx 4m/s\,.$$

Es besteht also keine Gefahr, dass man von einer derartigen Kugel erschossen wird. Auch durch noch so kräftiges Pusten haben es die Autoren nicht geschafft, die Magnetkugeln zu trennen.

Ein weiteres interessantes Experiment besteht darin, zwei Magnetkugeln auf einem glatten Untergrund leicht versetzt aufeinander zu rollen zu lassen [2]. Sobald die Magnetkraft der Kugeln ausreicht, die Reibung mit der Unterlage zu überwinden, richten sich entgegen gesetzte Pole zueinander aus und ziehen einander an. Bei der Annäherung der Kugeln nimmt aufgrund der Drehimpulserhaltung ihre Winkelgeschwindigkeit sehr stark zu, sodass sie sich beim Aufeinandertreffen sehr schnell umeinander drehen. Bei diesem Vorgang handelt es sich um die Umkehrung der Trennung der Kugeln voneinander. Tatsächlich erreicht man bei geschickter Wahl von Abstand und Anfangsgeschwindigkeit sehr hohe Drehzahlen des Doppelkugelkreisels.

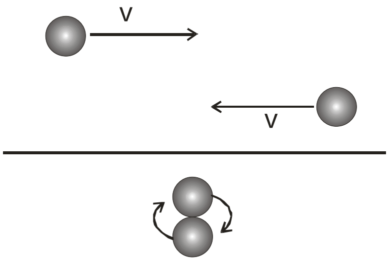

Abb. 7: Aufeinander zurollende Magnetkugeln vereinigen sich zu hoher Umdrehungszahl

Zusammenfassung:
Ein an einem Ende mit einer Marke versehener Zylinder und einem ganzzahligen Verhältnis von Länge zu Durchmesser zeigt nach einem geeigneten Andrehen eine ebenso ganzzahlige Anzahl dieser Marke. Dieser optische Effekt lässt sich mit einfachen Überlegungen an dem kreiselnden Zylinder erklären. In ähnlicher Weise kann man Kreisel aus zwei oder mehr zusammen gefügten Kugeln bauen und behandeln.

Literatur:

[1] **Mamola, Karl C.:** Rotational Dynamics, The Physics Teacher **32** (1994), 216-219
[2] **Dail, S.:** Angular Momentum Demo Using Magnetic Neodymium Spheres, The Physics Teacher **44** (2006), 391

WEB-links:
[3] *http://www.illeccio.com*
[4] *www.supermagnete.de*
[5] *http://www.grand-illusions.com/acatalog/Hurricane_Balls_with_Flower_Pattern.html*

Stichwörter:
Kreisel, Präzession, Rotation, Zylinder, Zykloide, Stroboskopeffekt

 erschienen in: Physik in unserer Zeit **40** (2009), Heft 1, 52-54

Anschriften:
Dr. Christian Ucke, Rofanstr. 14B, 81825 München
e-mail: ucke@mytum.de
Prof. Dr. Hans-Joachim Schlichting, Didaktik der Physik, Universität Münster, 48149 Münster
e-mail: schlichting@uni-muenster.de