

Physikalische Spielereien und Spielzeuge im interdisziplinären Umfeld

Christian Ucke, *Physikdepartment E 20, Techn. Univ. München, D-85747 Garching*
e-mail: ucke@e20.physik.tu-muenchen.de

Sehr geehrte Damen und Herren, liebe Kollegen,

Im Antikenmuseum in Berlin gibt es eine schöne Darstellung eines Jojo-spielenden griechischen Knabens. Das Jojo ist ein klassisches Spielzeug mit tiefem, physikalischen Hintergrund. Der griechische Knabe dürfte allerdings kaum an Physik gedacht haben, konnte aber vielleicht sehr gut damit umgehen.



Abb. 1: Auf einem Vasenbild aus dem 5. Jh. v. Chr. ist ein Jojo-Spieler dargestellt (Antikenmuseum Berlin). Auf der rechten Seite ist in der Sprechblase die korrekte Bewegungsgleichung eines Jojos wiedergegeben.

Bei einer anderen Darstellung [1] sieht man offensichtlich einen Physiker spielen. Die Differentialgleichung in der Sprechblase beschreibt korrekt die Bewegung eines Jojos. Ob der Physiker auch ein geschickter Jojo-Spieler ist, sei dahingestellt.

Ich stehe irgendwo zwischen diesen beiden Extremen. Ich spiele gern mit physikalischen Spielzeugen, bin aber weder ein leidenschaftlicher Jojo-Spieler noch ein theoretischer Physiker. Ich grabe bei interessanten Spielzeugen in der Umgebung herum - Geschichte, Technik, Patente, Soziologie usw. Dabei entdecke ich manchmal Neues oder wiederentdecke ich weniger bekanntes Altes.

Die Physik zum Jojo ist ausführlich untersucht [1]. Bei einem anderen klassischen, sehr einfach aufgebauten Spielzeug sind mir hingegen keine derartigen Publikationen zum

physikalischen Hintergrund bekannt. Es handelt sich um das sogenannte Zauberrad, das im alten Griechenland von Frauen benutzt wurde, um ihren treulosen Geliebten zurückzuerlangen. Dieses Spielzeug ist sogar weltweit bekannt [2], wenn auch nicht mit dem in Griechenland unterlegten Sinn. Durch eine mit zwei Löchern durchbohrte Scheibe werden Fäden gesteckt und dann aufgedrillt. Zieht und entspannt man rhythmisch an den Fäden, rotiert die Scheibe hin und her.



Abb.2: Das Zauberrädchen (Lynx) drehen im alten Griechenland Frauen, die ihren Geliebten damit zurückholen wollten.

Das zweite Objekt, das ich vorstellen möchte, ist der Zwei-Scheiben-Roller. Wenn man eine homogene Kugel eine leichtgeneigte Ebene hinunterrollt, bleibt der Abstand der Kugelmittelpunkts, der zugleich Schwerpunkt ist, in konstantem Abstand von der Ebene. Das Gleiche gilt für einen Zylinder. Der Schwerpunkt beschreibt beim Rollen eine gerade Linie.

Schneidet man aus einem Zylinder zwei elliptische Scheiben geeignet aus (Abb. 3), bewegt sich der Schwerpunkt ebenfalls in konstantem Abstand und auf einer geraden Linie.

Im rechten Teil von Abbildung 3 sind zwei Halbkreise senkrecht miteinander verbunden. Auch hier bleibt der Abstand des Schwerpunkts von der Ebene offensichtlich konstant. Seine Bahn ist aber keine gerade Linie mehr. Sie ähnelt vielmehr einer Schlangenlinie. Beim Abrollen bewegt sich dieser Zwei-Halbkreis-Roller taumelnd hin und her. Er wird im Englischen deswegen auch Wobbler genannt.

Der Schweizer Künstler Rolf Hergert hat nach diesem Prinzip ein Objekt geschaffen, das er Go-On nennt (Abb. 4). Es ist aus dem lichtsammelnden Material LISA gefertigt, welches häufig zu Werbezwecken eingesetzt wird. In das klare Plastikgrundmaterial sind fluoreszierende Moleküle eingelagert. Das führt zu dem interessanten Effekt, das das eindringende Licht intensitätsverstärkt an den Kanten austritt.

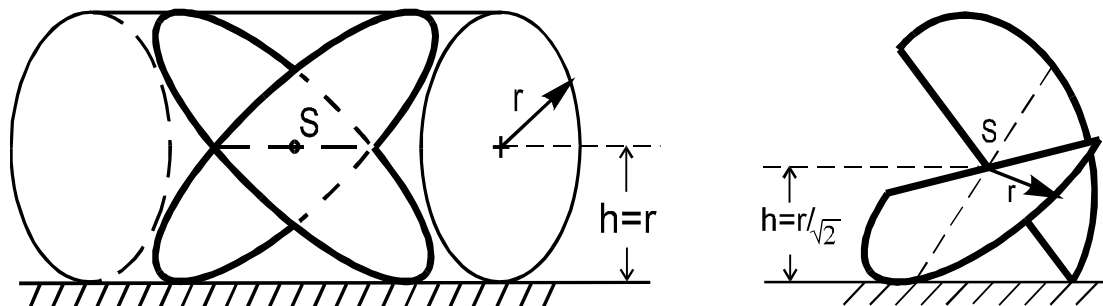


Abb. 3: Zwei aus einem Zylinder ausgeschnittene elliptische Scheiben halten beim Abrollen auf einer schiefer Ebene einen konstanten Schwerpunktabstand zur Ebene. Die Bahn des Schwerpunkts ist eine Gerade.

Bei der Konstruktion rechts sind zwei Halbkreise senkrecht miteinander verbunden. Der Schwerpunktabstand bleibt ebenfalls konstant. Die Bahn des Schwerpunkts ähnelt einer Schlangenlinie.

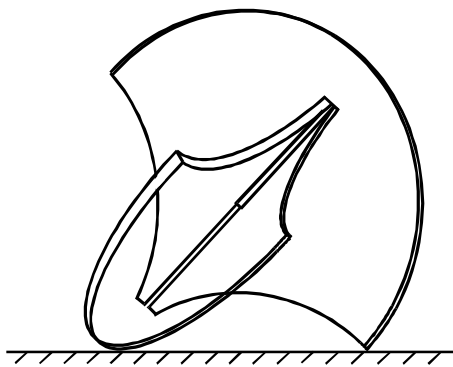
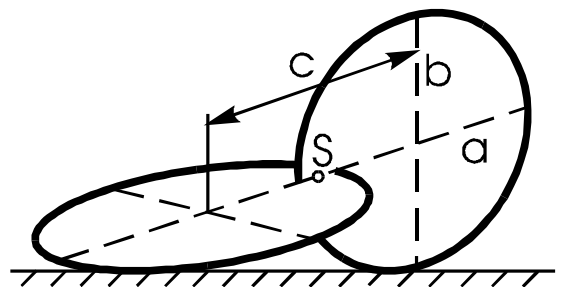


Abb. 4: Der Schweizer Künstler R. Hergert hat aus zwei halbkreisartigen Teilen ein Objekt geschaffen, das er Go-On nennt.



Circle: $c^2 = 2r^2$ Ellipse: $c^2 = 4a^2 - 2b^2$

Abb. 5: Zwei ganze Kreisscheiben, deren Mittelpunkte einem definiertem Abstand c aufweisen und die senkrecht zueinander verbunden werden, rollen mit konstantem Schwerpunktabstand zur Ebene. Das gilt sogar für Ellipsen (a = große; b = kleine Halbachse).

Verbindet man zwei ganze Kreisscheiben senkrecht zueinander, wie das in der Abb. 5 gezeigt ist, ergibt sich für einen - und nur diesen - Abstand der Mittelpunkte der Scheiben ebenfalls, das der Abstand des Schwerpunkts von der Ebene konstant bleibt. Die etwas längliche Rechnung dazu möchte ich hier nicht durchführen [3].

Die Bahn des Schwerpunkts sieht ebenfalls schlangenförmig aus. Bei dem Roller aus zwei Halbkreisscheiben ist diese Schlangenlinie mathematisch ziemlich einfach beschreibbar als aus Teilen von Kreisen zusammengesetzt (Abb. 6). Beim Roller mit zwei ganzen Kreisscheiben ist die Form dieser Linie bis jetzt nicht bekannt. Vermutlich gibt es keine analytische Lösung.

Das Prinzip des Zwei-Kreisscheiben-Rollers ist in diversen Spielzeugen und künstlerischen Objekten realisiert. Dabei wurde die gerade formulierte Abstandsbedingung manchmal ganz bewußt umgesetzt, manchmal unbewußt sehr genau getroffen, manchmal auch nicht genau verwirklicht. Dafür seien einige Beispiele angeführt.

Bei einem finnischen Kinderspielzeug aus Holz namens Ensihammas (Abb.7) ist diese Abstandsbedingung ebenfalls unbe-

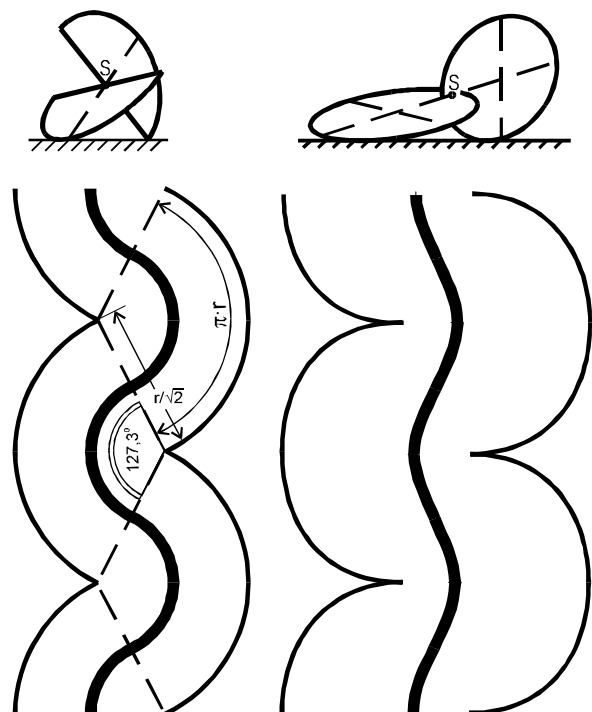


Abb. 6: Die Bahnen der Schwerpunkte der Zwei-Scheiben-Roller sind schlangenförmige Linien.

absichtigt erfüllt. Die taumelnde Bewegung beim Rollen dieses Spielzeugs scheint sogar Kleinkinder zu faszinieren.

Ein einfaches Beispiel sind die am Rand eingeschnittenen Kreisscheiben des Konstruktionsspielzeugs Rondi (Abb. 8). Steckt man zwei der Scheiben bis zum Anschlag ineinander, ist die Abstandsbedingung ziemlich genau erfüllt. Der Hersteller hatte das allerdings nicht beabsichtigt.

Die englische Künstlerin A. Alley hat einen großen Zwei-Scheiben-Roller geschaffen und ihn 'Rocking Toy' genannt (Abb. 9). Hier ist die Abstandsbedingung nicht erfüllt. Das hat zur Folge, daß das Objekt nach einem Anstoß hin- und herwackelt.



Abb. 7: Das finnische Kinderspielzeug Ensihammas (Größe $\gg 6\text{cm}$) ist ein Zwei-Kreis-Roller.



Abb. 8: Mit dem Konstruktionsspielzeug Rondi (Größe $\gg 2,5\text{cm}$) läßt sich ebenfalls ein Zwei-Kreis-Roller zusammenstecken.

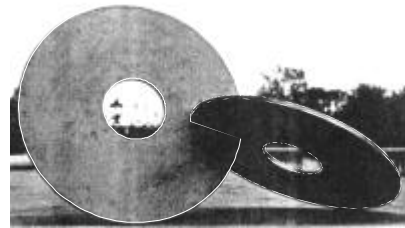


Abb. 9: Dieses künstlerische Objekt mit einer Größe von etwas über einem Meter wackelt hin und her.

Mit Bieruntersetzern (Bierfilze) lassen sich sehr gut Zwei-Scheiben-Roller bauen. Auch elliptische Bieruntersetzer eignen sich hervorragend. Mit meinem Koauthor C. Engelhardt konnten wir unseren Bedarf irgendwann in normalen Gaststätten nicht mehr befriedigen und schrieben an eine Brauerei. Die Reaktion war außerordentlich positiv. Wir bekamen mehrere hundert Bieruntersetzer und mehrere Kästen Bier 'zur Förderung unserer Forschungsaktivitäten'.

Bei näherer Untersuchung der Rollbewegung ergibt sich, daß eine einbeschriebene Kugel mit dem Radius $r = b / \sqrt{2}$ (b = kleine Halbachse der Ellipse) den ebenen Untergrund immer berührt (Abb. 10). Verfolgt man die Berührkurve auf dieser Kugel ergibt sich gerade eine sogenannte Tennisballkurve. In Abb. 11 ist diese Kurve als Schnitt eines hyperbolischen Paraboloids mit einer Kugel dargestellt. Von hier kann man tiefer in die Mathematik der Kegelschnitte eintauchen.

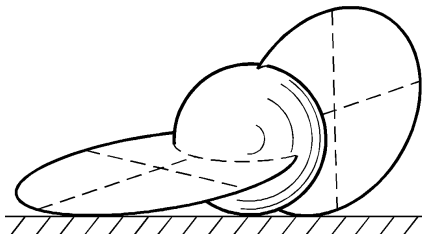
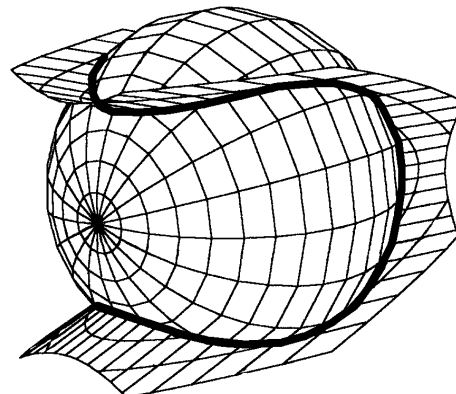


Abb. 10: Die zentral zwischen den Scheiben des Rollers einbeschriebene Kugel berührt beim Rollen immer den Boden.

Abb. 11 (rechts): Die Berührkurve auf der Kugel läßt sich als Schnitt der Berührkugel mit einem hyperbolischen Paraboloid darstellen.



Verbindet man die Auflagepunkte eines Zwei-Kreis-Rollers sukzessive miteinander, erhält man einen ästhetisch aussehenden Körper (Abb. 12), den die Mathematiker als Torse bezeichnen. In diesem Fall ergibt sich ein konvexer Hüllkörper, der sich in der Ebene abwickeln läßt.

Ein auf den ersten Blick ganz gleich aussehender Körper ist der Oloid (Abb. 13). Ursprünglich wurde er in komplizierter Weise als Hüllkörper des sogenannten umstülpbaren Würfels von Paul Schatz [4] definiert. Einfacher ist er aus der Bedingung zu konstruieren, daß der Mittelpunktsabstand der erzeugenden Kreisscheiben beim Oloid gerade so groß ist wie der Durchmesser eines Kreises. Da dieser Abstand nicht der vorher zitierten Bedingung für einen konstanten Schwerpunktsabstand entspricht, wackelt der Oloid deshalb auch bei leichtem Anstoßen hin und her. Bei stärkerem Anstoß rollt er allerdings auch ziemlich leicht über eine Ebene, was daran liegt, daß der Schwerpunkt in der Höhe nur sehr wenig variiert. Leicht herleiten läßt sich, daß beim Oloid - im Gegensatz zum Zwei-Scheiben-Schwerpunktsroller - die Verbindungsstrecken der Auflagepunkte immer gleich groß sind ($= r \cdot \sqrt{3}$).

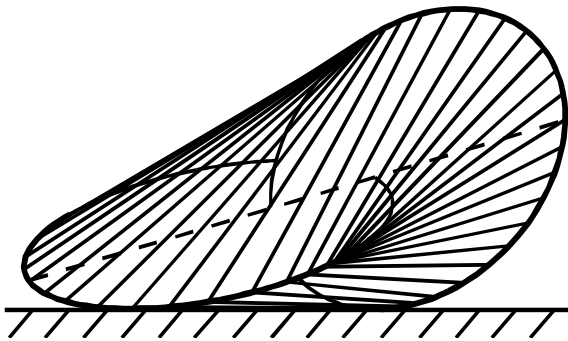


Abb. 12: Verbindet man die jeweiligen Auflagepunkte des Zwei-Scheiben-Rollers, erhält man einen ästhetisch ansprechenden Körper, der von den Mathematikern auch Torse genannt wird.



Abb. 13: Der sogenannte Oloid sieht der Torse des Zwei-Scheiben-Rollers zum Verwechseln ähnlich, hat jedoch einen ganz anderen Hintergrund.

Aus dem Oloid ist ein Sportgerät entwickelt worden, das den Namen **Rolodil** erhalten hat [5]. Es besteht aus einem Rohrgerüst (Abb. 14), bei dem zwei Haupteinhüllende des Oloids die Grundform bilden. Der Sportler hängt sich an innen befindlichen Halterungen bzw. Schlaufen ein und kann dann mit seinen Eigenbewegungen das Rolodil zum Schaukeln bzw. zum Rollen bringen. Aus einer Beschreibung zum Rolodil stammt folgendes Zitat: „Durch die beiden sich abwechselnden, rhythmisch pulsierenden Bewegungen des Rolodils erlebt der Benutzer (Fahrer) ein Wechselspiel von ungeahnten, positiven Einflüssen auf das Körpergefühl - ja, eine Synergiewirkung auf Körper und Geist.“ Zum Verständnis dieser Aussage ist es hilfreich zu wissen, daß Paul Schatz Anthroposoph war.

Ein Salto rückwärts gehört zum Standardrepertoire eines guten Turners. Er läßt sich in ähnlicher Weise aufnehmen und analysieren. Der Vergleich zwischen Spielzeug und sportlicher Betätigung ergibt deutliche Unterschiede: Das Trägheitsmoment des Spielzeugs bleibt konstant, dasjenige des Menschen verändert sich während des Fluges in charakteristischer Weise. Mit Hilfe spezieller Programme [7] wird in Sportinstituten [8] eine genaue Analyse derartiger sportlicher Bewegungen durchgeführt und auch die dahinter steckenden physikalischen Probleme bearbeitet.

Bei der in Abb. 17 dargestellten Strichmännchen-Darstellung eines realen Saltos eines Menschen erkennt man an dem nach oben weisenden Kraftpfeil, daß sich zu Beginn das scheinbare Gewicht etwas verringert, weil der Turner schnell beschleunigt in die Knie geht. Dann allerdings stößt er sich mit den Beinen ab und erzielt dadurch eine hinreichend große Beschleunigung, um vom Boden zum freien Flug abzuheben. Beim Wiederauftreffen auf den Boden muss er eine relativ große Verzögerung 'erleiden', die etwas mehr als dem Doppelten der Erdbeschleunigung entspricht. Diese verbale Beschreibung findet Ihren Niederschlag in der quantitativen Auswertung, wie sie in Abb.

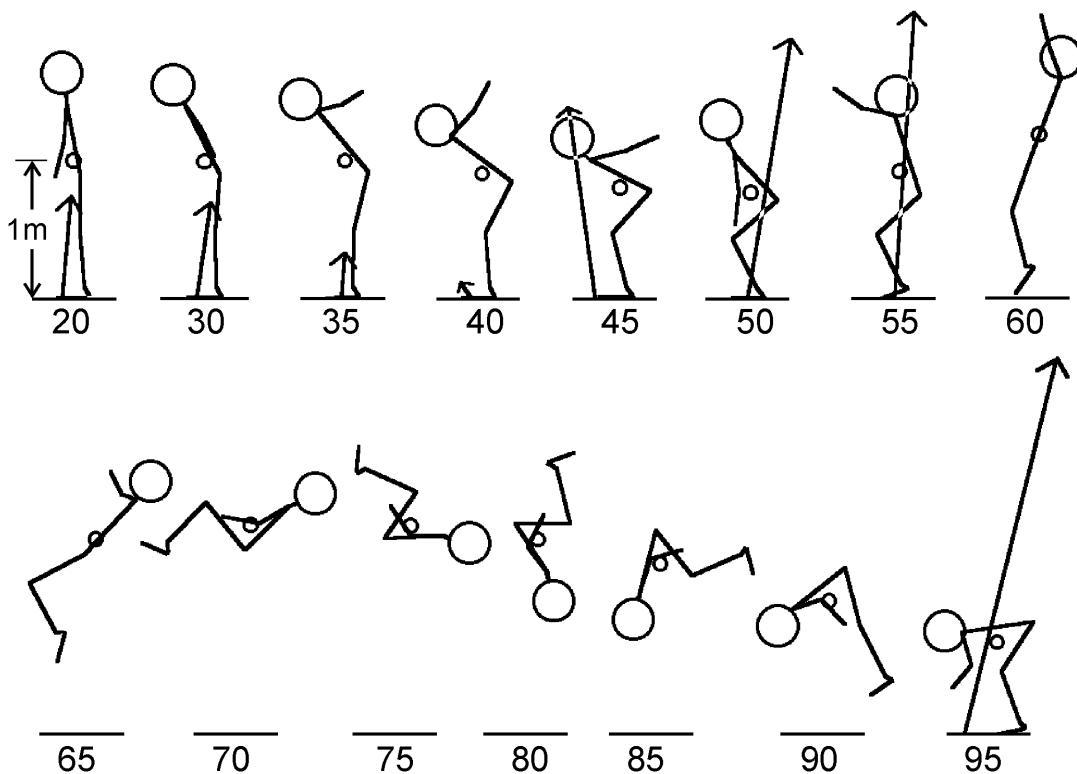


Abb. 17: Mit Videokameras werden sportliche Aktivitäten aufgenommen und in den Computer hineingespielt. Mit dem Programm SIMI-Motion [7] können daraus Strichmännchen-Darstellungen erstellt werden. Hier ist das für einen Salto rückwärts gezeigt. Die Zahlen unter den Bildern stellen die Nummern der Halbbilder der ausgewerteten Videosequenz dar. Die Bilder haben einen Zeitabstand von 0,1s (= 5x20ms). Der kleine, runde Kreis in der Mitte ist der auf Grund von Modellannahmen berechnete Körperschwerpunkt. Der Pfeil stellt die jeweils auf den Boden wirkende, gemessene Kraft dar. Die Masse des Turners betrug 73kg; damit läßt sich der Pfeil skalieren, da beim ersten Bild nur die Gewichtskraft des Turners wirkt.

18 wiedergegeben ist. Dort sind die Höhe des Körperschwerpunkts über dem Boden und die vertikale Beschleunigung in Abhängigkeit von der Bildnummer dargestellt. Der Schwerpunkt erhebt sich bloß um 50cm über die Ruhelage beim Stehen. Die Beschleunigung geht kurz vor dem Abheben deutlich hoch. Während der Freiflugphase des Körpers sollte sie eigentlich konstant -10ms^{-2} betragen. Das ist hier aber auf Grund einer begrenzten Auswertegenauigkeit nicht der Fall.

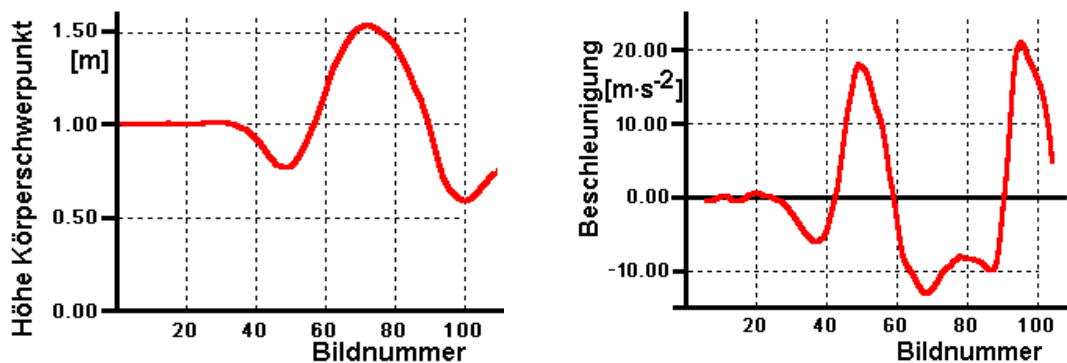


Abb. 18: Salto rückwärts: die Höhe des Körperschwerpunkts über dem Boden und die Beschleunigung des Körperschwerpunkts in Abhängigkeit von der Bildnummer.

Eine interessante Frage ist, mit welchen Mitteln der Turner die Drehung rückwärts erzeugt. Zum einen wird ein Drehmoment erzeugt, wenn kurz vor dem Abheben der Kraftvektor am Schwerpunkt vorbei zielt. Zum anderen wird aber durch das Zurückreißen der Arme während des Fliegens der Körper in die richtige Richtung gedreht. Dies quantitativ abzuschätzen ist schon erheblich aufwendiger. Jedenfalls werden solche Untersuchungen in dem angeführten Institut angestellt.

Vom Sport komme ich nun etwas unvermittelt zur Optik. An einem sonnigen Tag gemütlich auf einer Terrasse sitzend kann man in einer zylindrischen, innen gut reflektierenden und mit Kaffee gefüllten Tasse eine Kaustik beobachten, die auch direkt als 'Kaffeetassenkaustik' bekannt ist (Abb. 19). Teetrinkern ist diese Beobachtung ebenfalls möglich, sofern sie etwas Milch in den Tee tun. Verändert sich der Sonnenstand, wobei das Warten darauf den Kaffee leicht kalt werden läßt bzw. trinkt man etwas Kaffee, wodurch der Spiegel des Kaffees absinkt, verändert sich auch die Kaustik in charakteristischer Weise (Abb. 20). Der Kaustikeffekt tritt auch sehr gut in einem zylindrischen, innen polierten Ehering auf. Um diese Erscheinungen noch besser reproduzieren zu können, habe ich



Abb. 19: In einer Kaffeetasse kann man unter geeigneten Bedingungen eine Kaustik sehen.

einen Messingring von etwa 4cm Durchmesser innen poliert. Mit einer kleinen Halogen-Lampe lassen sich die Kaustiken hervorragend erzeugen. Damit sind auch die Fotos in Abb. 20 erstellt.

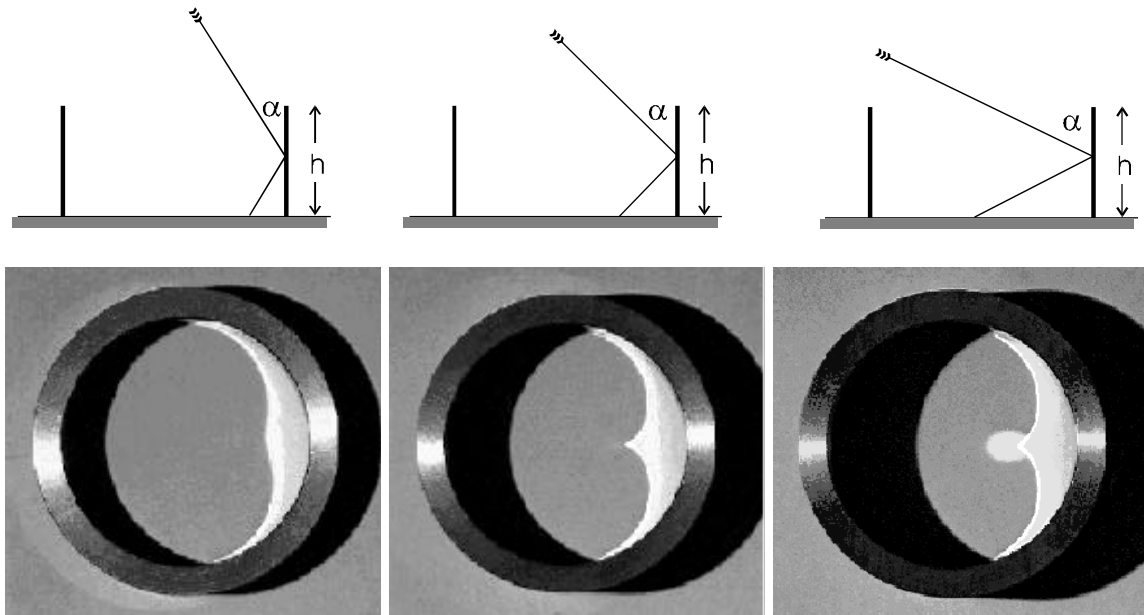


Abb.20: Das Aussehen der Kaustik hängt vom Einfallswinkel α und/oder von der Höhe h des erzeugenden Zylinders ab. Im linken Bild ist $h \cdot \tan \alpha < r/2$ ($r =$ Zylinderinnenradius); die Kaustik ist nicht vollständig. Im Mittelbild ist genau $h \cdot \tan \alpha = r/2$; dies ist die 'klassische' Kaustik mit einer scharfen Spitze. Im rechten Bild ist $h \cdot \tan \alpha > r/2$; man erkennt die klassische Kaustik überlagert mit einer zusätzlichen Schleife.

Kaustiken sind von der Optik her bei sphärischen Linsen und Hohlspiegeln schon lange bekannt. Bereits Christian Huyghens (1629-1695) hat sie beschrieben. Der Schweizer Mathematiker Johann Bernoulli (1667-1748) hat die formelmäßige Beschreibung als sogenannte Epizykloide veröffentlicht [9]. Eine Epizykloide entsteht durch Abrollen eines Kreises auf einem anderen Kreis. Der Fall ganz rechts aus Abb. 20 sei beispielhaft herausgegriffen. In Abb. 21 sind die beobachtbaren Strukturen herausgezeichnet. Einerseits die klassische Kaustik, andererseits die überlagerte Schleife. Sei r der Innenradius des Zylinders, dann entsteht der Rand der klassischen Kaustik durch Abrollen eines Kreises mit $r/4$ auf einem zentralen Kreis mit $r/2$. Der kleine $r/4$ -Kreis ist oberhalb des $r/2$ -Kreises dargestellt. Der Rand der Schleife hingegen wird durch Abrollen eines $r/2$ -Kreises auf dem zentralen $r/2$ -Kreis bewirkt, wobei aber der die Zykloide erzeugende Punkt sich im Abstand $h \cdot \tan \alpha$ vom Mittelpunkt des Kreises auf der Verlängerung des Radius befindet. Man spricht in diesem Fall auch von einer verlängerten Epizykloide.

Die parametrische Darstellung der hier entstehenden Kaustiken lautet [10]:

$$x(\mathbf{j}) = r \cdot \sin \mathbf{j} + h \cdot \tan \mathbf{a} \cdot \cos 2\mathbf{j}$$

$$y(\mathbf{j}) = r \cdot \cos \mathbf{j} - h \cdot \tan \mathbf{a} \cdot \sin 2\mathbf{j}$$

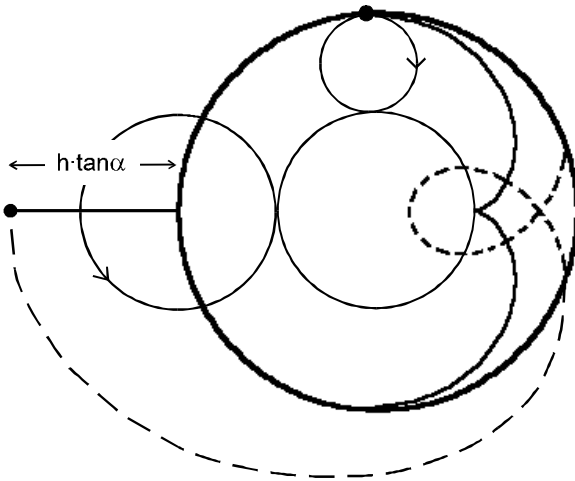


Abb. 21: Im Fall eines großen Einfallswinkels \mathbf{a} besteht die Kaustik aus zwei überlagerten Erscheinungen: der klassischen Kaustik und einer Schleife. Beide lassen sich als Epizykloide darstellen.

Natürlich ist es mit den heutigen Programmen (MATHEMATICA, MAPLE usw.) bequem und schön möglich, diese Kurven am Rechner darzustellen. Es gibt jedoch auch ein schon lange bekanntes, mathematisches Spielzeug namens SPIROGRAPH, mit dem derartige Zykloiden erzeugt werden können (Abb. 22). Es besteht aus einem Satz von Zahnrädern, mit deren Hilfe sich auf Papier die verschiedenartigsten Kurven produzieren lassen. Das können schon Kinder und haben ihren Spaß an den ästhetischen Figuren.

Man kann sich die Frage stellen, wie sich die Kaustik verändert, wenn der Einfallswinkel α immer größer wird. In Abb. 23 ist das

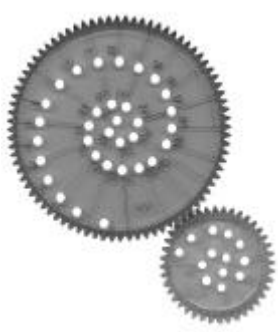


Abb. 22: Mit den Zahnrädern des mathematischen Spielzeugs SPIROGRAPH lassen sich auch die Epizykloiden der Kaustiken erzeugen.

schematisch und mit den entsprechenden Fotos darunter wiedergegeben. Je größer der Winkel α , d.h. je flacher das Licht in den Ring einfällt, um so mehr Reflexionen im Ring sind möglich. Bei zwei Reflexionen ergibt sich eine herzförmige Figur. Bei drei Reflexionen ebenfalls. Je mehr Reflexionen, um so kleiner und schwächer wird das Herz, aber es bleibt ein Herz. Etwa ab der fünften oder sechsten Mehrfachreflexion läßt sich die Erscheinung praktisch nicht mehr beobachten, da sie zu lichtschwach wird.

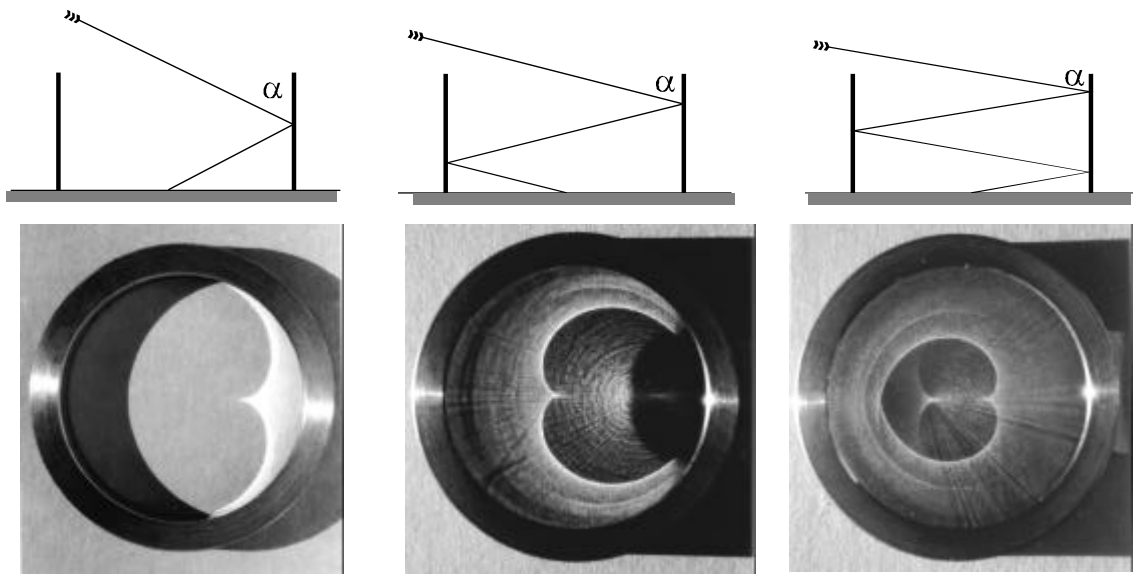


Abb. 23: Fällt Licht immer flacher in den zylindrischen Hohlspiegel ein, ergeben sich Mehrfachreflexionen, die schließlich zu herzförmigen Figuren führen.

Auch hier sind die so entstehenden Kaustiken mit einer parametrischen Darstellung von Epizykloiden zu beschreiben, wobei die Anzahl der Reflexionen durch den Parameter n charakterisiert wird [11]:

$$x(\mathbf{j}) = \frac{r}{4n} [(2n+1) \sin((2n-1)\mathbf{j}) + (2n-1) \sin(2n+1)\mathbf{j}]$$

$$y(\mathbf{j}) = \frac{r}{4n} [(2n+1) \cos((2n-1)\mathbf{j}) + (2n-1) \cos(2n+1)\mathbf{j}]$$

Die mathematischen Darstellungen der im vorhergehenden beschriebenen Kaustiken hat der Physikstudent C. Engelhardt erarbeitet. Natürlich erhebt sich die Frage, ob das nicht längst schon irgendwo publiziert ist. Das ist tatsächlich so. Aber es ist nicht leicht zu finden, da die entsprechende, ziemlich mühsam zu lesende Veröffentlichung aus dem Jahre 1852 stammt [12]. C. Engelhardt war dennoch nicht frustriert. Einerseits hat er sich von einer elementaren physikalischen Beobachtung selbstständig bis zur mathematischen Formulierung vorangearbeitet. Zum anderen hat er weitergehende Beobachtungen und Überlegungen angestellt, die möglicherweise noch in eine Publikation bzw. Diplomarbeit in Mathematik für ihn münden.

Literatur:

- [1] **W. Bürger:** "Das Jojo - ein physikalisches Spielzeug", Physikalische Blätter **39**, 401-404 (1983).
- [2] **R. Holler:** Kreisel, Hugendubel-Verlag, München 1996
- [3] **C. Engelhardt, C. Ucke,** "Zwei-Scheiben-Roller", Mathematisch-Naturwissenschaftlicher Unterricht **48**, 259-263 (1995).
- [4] **P. Schatz:** Rhythmusforschung und Technik, Verlag Freies Geistesleben, Stuttgart 1975
- [5] Bioengineering AG, Sagenrainstr. 7, CH-8636 Wald, Schweiz
- [6] **C. Ucke:** Saltospringer, Physik in der Schule **31**, 187-189 (1989)
Zu diesem Aspekt sind einige AVI-Files und Bildsequenzen unter der Adresse:
<ftp.e20.physik.tu-muenchen.de/pub/physicstoys/> herunterladbar. AVI-Files sind mit dem Media-Player unter WIN95 bzw. unter Windows 3.1 (sofern adäquat eingerichtet) als Filmsequenzen abspielbar.
- [7] Programm SIMI-Motion; Fa. SIMI GmbH, Postfach 1518, 85705 Unterschleißheim
Internet-Adresse: <http://www.simi.com>
- [8] Lehrstuhl für Bewegungs- und Trainingslehre, Zentrale Hochschulsportanlage,
Techn. Univ. München, Connollystr. 32, 80809 München
- [9] **Joh. Bernoulli:** Lectiones mathematicae de methodo integralium aliisque conscriptae in usum ill. Marchionis Hospitalii, Opera omnia, t. III, p. 386-558, Paris 1692
- [10] **C. Engelhardt:** to be published
- [11] **C. Ucke; C. Engelhardt:** Katakaustiken bei Mehrfachreflexionen, In: Fachverband Didaktik der Physik (Hg.): Vorträge auf der 60. Physikertagung, Jena 1996, S. 237-242
- [12] **H. Holditch:** On the n-th caustic, by reflexion from a circle, Quarterly Journal of Mathematics **2**, 301-322 (1858)