

# Katakaustiken bei Mehrfachreflexionen

Ucke, Christian; Engelhardt, Christoph

Technische Universität München, Physikdepartment E20, 85747 Garching

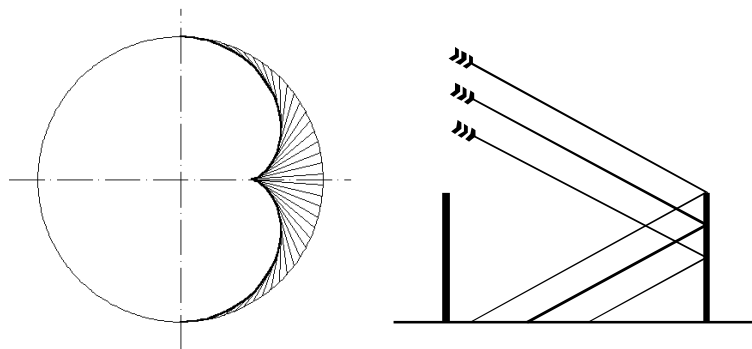
Jedem Physiker sind Kaustiken bekannt. Sie treten als Diakaustik beim Durchtritt eines Lichtbündels durch ein optisches Medium auf. Die sphärische Aberration bei einer Linse ist dafür ein Beispiel. Als Katakaustik bezeichnet man die Enveloppen der an ebenen Kurven reflektierten Strahlen. Die bei Einfall eines Parallellichtbündels auf einen sphärischen Hohlspiegel entstehende Figur dient in vielen Physikbüchern als Beispiel. Genauer unterscheidet man Katakaustiken erster Art (Lichtquelle im Endlichen) und Katakaustiken zweiter Art (Lichtquelle im Unendlichen).

Katakaustiken sind leicht zu beobachten und einem breiteren Publikum dadurch bekannt, daß sie bei schräg von der Sonne beleuchteten und hinreichend gefüllten und geeigneten Kaffeetassen auftreten (sog. Kaffeetassenkaustik). Natürlich funktioniert das auch mit Tee, vorausgesetzt, man tut etwas Milch hinein. Sie haben schon früh das Interesse von Physikern und Mathematikern hervorgerufen. Christian Huygens (1629-1695) hat sich damit befasst und Johann Bernoulli (1667 - 1748) hat sie mathematisch ausführlich untersucht und in vielen Beispielen behandelt [1]. Für den - fortgeschrittenen - Schulunterricht gibt es eine Bearbeitung dieser Thematik [2, 3].

Wir möchten hier die Erscheinungen vorstellen, die durch Mehrfachreflexionen eines Parallellichtbündels in einem kreisförmigen zylindrischen Hohlspiegel entstehen. Physikalisch sind sie leicht zu realisieren, indem man z.B. einen innen zylinderförmigen, nicht allzu schmalen und außerdem hochpolierten Ehering auf Papier auflegt und schräg einfallender Sonnen- bzw. Lampenbeleuchtung aussetzt. Man erkennt zunächst die übliche Katakaustik des Hohlspiegels (siehe Abb.1). Vom Einfallswinkel des Parallelstrahls und der Höhe des Zylinderrandes hängt ab, welcher Anteil der Kaustik zu sehen ist. Für die mathematische Betrachtung ist dieser Einfallswinkel aber nicht relevant. Mathematisch formuliert, handelt es sich um eine Epizykloide. Die Spitze der Epizykloide liegt auf halbem Abstand zwischen Kreismittelpunkt und Kreisrand.

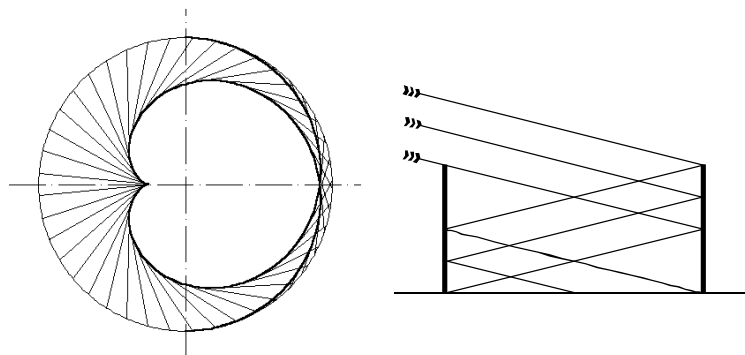
*Abb.1: Ein von links einfallender Parallelstrahl (nicht gezeichnet) erzeugt bei einmaliger Reflexion am Hohlspiegel die übliche Katakaustik.*

*Physikalisch ist das leicht mit einem schräg in einen zylindrischen Hohlspiegel einfallenden Parallelstrahl zu realisieren.*

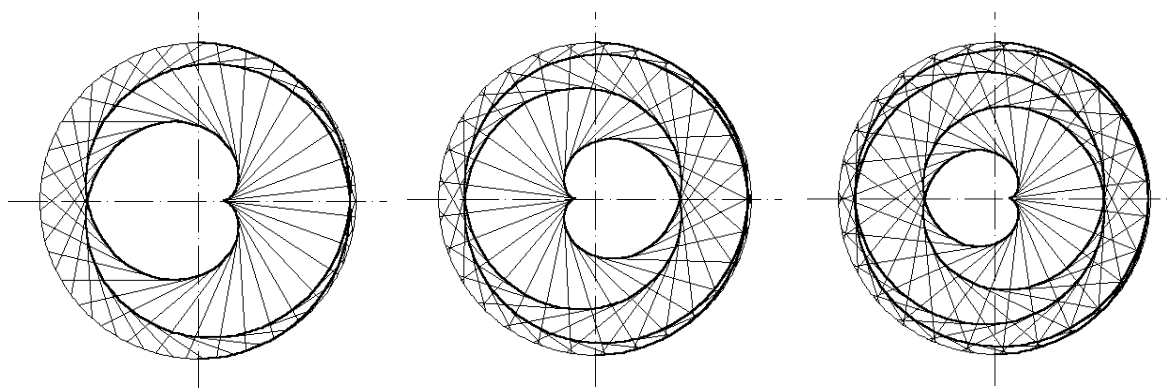


Läßt man die Sonnenstrahlen immer flacher einfallen, ergibt sich eine herzförmige Erscheinung, wie sie in Abb. 2 zu erkennen ist. Diese Figur entsteht durch zweimalige Reflexion am inneren Hohlspiegel. Auch hier handelt es sich um eine Epizykloide.

*Abb.2: Ein von links einfallender Parallelstrahl erzeugt bei zweimaliger Reflexion diese Katakaustik. Der Übersichtlichkeit halber sind nur die Strahlen zu sehen, die bei der zweiten Reflexion entstehen. Rechts ist die physikalische Realisierung angedeutet.*



Mit normalen Eheringen lassen sich weitere Reflexionen kaum darstellen, da sie keine ausreichende Höhe aufweisen. Nimmt man stattdessen einen innen polierten Messingzylinder (beispielsweise mit einem Innendurchmesser von 4cm und einer Höhe von 2cm), kann man bei immer flacherem Einfall noch Kautstiken beobachten, bei denen bis zu fünf oder sechs Reflexionen beteiligt sind (siehe Abb. 3, 4, 5). In der physikalischen Realität werden die Kautstiken mit zunehmender Reflexionsordnung immer lichtschwächer, da ein immer kleinerer Teil des Parallelstrahls überhaupt noch zur Erscheinung beiträgt.



*Abb. 3, 4, 5: Ein von links einfallender Parallelstrahl erzeugt bei immer flacheren Einfallswinkeln im Prinzip immer wieder die gleiche herzförmige Figur. Links das Bild bei dreifacher, in der Mitte bei vierfacher und rechts bei fünffacher Reflexion.*

Die mathematische Herleitung der Kaffetassenkaustik läßt sich folgendermaßen erschließen. Sei  $n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) die Reflexionsordnung, die angibt wie oft ein einfallender Lichtstrahl an der Innenwand des Spiegels reflektiert worden ist (Abb. 6).  $\mathbf{j}$  sei der Polarwinkel des 1. Reflexionspunktes gemessen im Uhrzeigersinn von der positiven  $y$ -Achse des in den Mittelpunkt des kreisförmigen Spiegels gelegten kartesischen Koordinatensystems (siehe Abb.

7). Jedem an der Innenwand des Spiegels (auch mehrfach) reflektierten Strahl des von links auf den Kreisspiegel einfallenden parallelen Lichtstrahlenbündels läßt sich so genau ein  $\mathbf{j}$  zuordnen.  $r$  ist der Radius des Hohlspiegels (bzw. der Innenradius der Kaffeetasse).

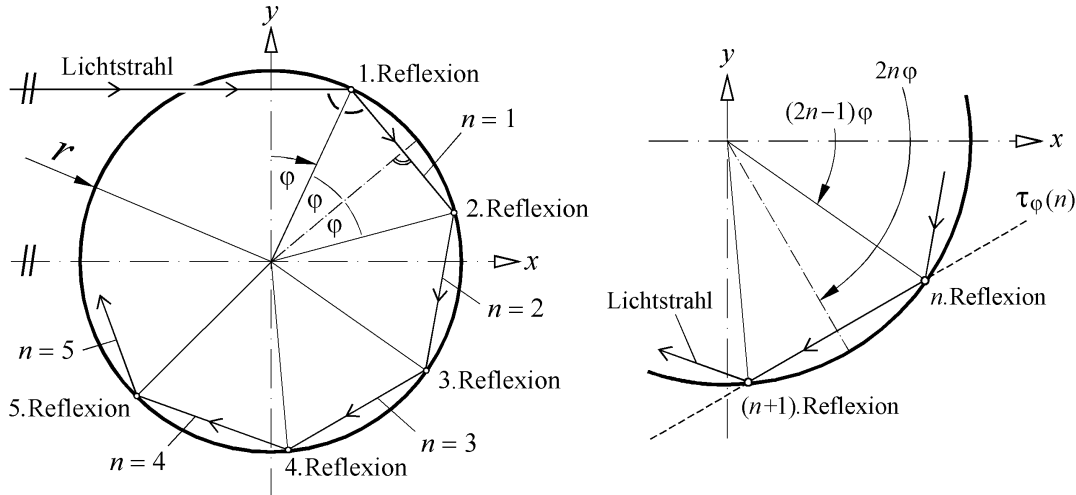


Abb. 6, 7: Zur mathematischen Ableitung der kaustischen Kurven dienen diese Darstellungen. Ein Lichtstrahl fällt von links ein und wird an der Innenseite mehrfach reflektiert.

Die Kaustik der Ordnung  $n$  ergibt sich mathematisch als die Einhüllende der jeweils  $n$  mal an der Innenwand des Spiegels reflektierten Lichtstrahlen. Die Gleichung dieser Reflexionsstrahlenschar zur Reflexionsordnung  $n$  ergibt sich mit den vorher definierten Größen  $\varphi$  und  $n$  in dem in den Mittelpunkt des kreisförmigen Zylinderspiegels gelegten Koordinatensystem aus der Abb. 7 zu

$$\tau_{\varphi}(n) : x \cdot \sin(2n\varphi) + y \cdot \cos(2n\varphi) - r \cdot \cos\varphi = 0$$

Die gesuchte Katakaustik zur Reflexionsordnung  $n$  ist die Einhüllende der Schar  $\tau_{\varphi}(n)$  deren Parameterdarstellung im Folgenden berechnet wird. Dazu differenziert man die Koordinatengleichung der Schar  $\tau_{\varphi}(n)$  partiell nach dem Scharparameter  $\mathbf{j}$  und erhält

$$\partial/\partial\varphi(\tau_{\varphi}(n)) : 2nx \cdot \cos(2n\varphi) - 2ny \cdot \sin(2n\varphi) + r \cdot \sin\varphi = 0$$

Die letzten beiden Gleichungen bilden ein lineares Gleichungssystem in  $x$  und  $y$ , dessen Lösungen  $x(\mathbf{j})$  und  $y(\mathbf{j})$  die Parameterdarstellung der Einhüllenden der Schar  $\tau_{\varphi}(n)$  also der Kaustik sind. Nach einigen Umformungen erhält man die Parameterdarstellung der Katakaustik nach  $\varphi$ :

$$x(\mathbf{j}) = \frac{r}{4n} [(2n+1) \sin((2n-1)\mathbf{j}) + (2n-1) \sin(2n+1)\mathbf{j}]$$

$$y(\mathbf{j}) = \frac{r}{4n} [(2n+1) \cos(2n-1)\mathbf{j}) + (2n-1) \cos(2n+1)\mathbf{j}]$$

Dies ist gerade die Parameterdarstellung einer *Epizykloide*.

Als Kaustik ist aber nur eine *Hälfte* der Epizykloide sichtbar (siehe Abb. 1,2,3,4,5). Bezüglich der obigen Parameterdarstellung erhält man genau die eine Hälfte der Epizykloide, die bei *linkseinfallenden* Lichtstrahlen (siehe Abb.1,2,3,4,5) als Kaustik erscheint, wenn der Parameter  $\varphi$  das Intervall  $[0,\pi]$  durchläuft.

Die singulären Punkte, also die Spitzen der Epizykloide, die physikalisch die *Brennpunkte des Spiegels* zur jeweiligen Reflexionsordnung  $n$  sind, liegen auf der  $x$ -Achse bei

$$x_f(n) = \frac{(-1)^{n+1}}{2n} r$$

Dies ergibt sich aus der Parameterdarstellung der Kaustik, indem man  $\varphi = \pi/2$  setzt, also  $x_f(n) = x(\mathbf{p}/2)$ . Man erkennt aus obiger Formel, daß dieser Brennpunkt für immer höhere Reflexionsordnungen in den *Mittelpunkt* des Kreis-  
spiegels wandert.

Die Epizykloide ist eine sogenannte *Radlinie*, die kinematisch folgendermaßen erzeugt werden kann:

Rollt ein Kreis  $K$  mit Radius  $a$  auf einem im Koordinatensystem festen Kreis  $L$  (*Leitkreis*) mit Radius  $b$  gleitfrei an der *Außenseite* von  $L$  ab, so durchläuft ein auf dem Umfang von  $K$  fester Punkt eine Epizykloide.

Allgemein ist eine Epizykloide in ihrer *Form* durch das *Radienverhältnis*  $a/b$  der aufeinander abrollenden Kreise  $K$  und  $L$  bestimmt. In unserem Fall muß die Summe aus dem Durchmesser  $2a$  des Abrollkreises  $K$  und dem Radius  $b$  des Leitkreises  $L$  immer gleich dem Radius  $r$  der Kaffeetasse sein, also  $2a+b = r$ .

Der Radius  $b$  des Leitkreises  $L$  ist aber gerade  $b = |x_f(n)| = r/2n$ . Damit lautet der Radius  $a$  des abrollenden Kreises  $K$  :  $a = (r-b)/2 = r(2n-1)/4n$ .

Das Radienverhältnis  $a/b$  in Abhängigkeit von der Reflexionsordnung  $n$  ergibt daraus zu  $a/b = n-0,5$ . Da  $n$  eine *natürliche Zahl* ist, ist  $a/b$  immer *rational*. Genau dann ist die durch das Aufeinanderabrollen der Kreise  $K$  und  $L$  erzeugte Epizykloide eine *geschlossene* Kurve.

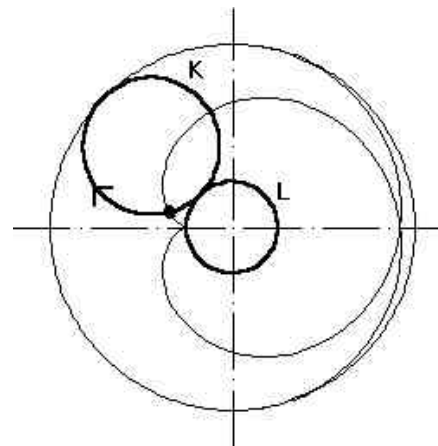


Abb.8: Die Kaustik der 2. Reflexion wird kinematisch durch Abrollen des Kreises  $K$  auf dem Kreis  $L$  erzeugt.

Mit dem Programmpaket MATHEMATICA® lassen sich die Kaustiken mit wenigen Programmzeilen grafisch darstellen.

## Programm mit Mathematica Version 2.2

(\*  $n$  ist die Reflexionsordnung,  $k$  die Anzahl der Reflexionsstrahlen \*)

(\*  $t (= \mathbf{j})$  ist der Polarwinkel des 1. Reflexionspunktes, gemessen gegen den \*)

(\* Uhrzeigersinn von der vertikalen Symmetrieachse \*)

```
xk[n_,t_] := 1/(4n) ((2n + 1) Sin[(2n - 1)t] + (2n - 1) Sin[(2n + 1)t]) ;
```

```
yk[n_,t_] := 1/(4n) ((2n + 1) Cos[(2n - 1)t] + (2n - 1) Cos[(2n + 1)t]) ;
```

```
kaustik[n_] := ParametricPlot[ { xk[n,t] , yk[n,t] } , {t,0,Pi} ,  
    DisplayFunction -> Identity , PlotStyle -> AbsoluteThickness[.55]] ;
```

(\* Die, die Kaustik einhüllende Geradenschar der Reflexionsstrahlen \*)

```
schar[n_,k_] := Graphics[ { Thickness[.0015] , Evaluate[ Table[ Line[  
{ { Sin[(2n - 1)t] , Cos[(2n - 1)t] } , { xk[n,t] , yk[n,t] } } ] , {t,0,Pi,Pi/k} ] ] ] ;
```

(\* der Zylinderspiegel mit Koordinatenkreuz \*)

```
spiegel := Graphics[ { AbsoluteThickness[.65] , Circle[ {0,0} , 1 ] } ] ;
```

```
kokreuz := Graphics[ { AbsoluteThickness[.4] , AbsoluteDashing[{25,4,.,5,4}] ,  
    Line[ {{-1.2,0},{1.2,0}} ] , Line[ {{0,-1.2},{0,1.2}} ] ] ] ;
```

```
Show[ { kaustik[1] , schar[1,61] , spiegel , kokreuz } ,  
    DisplayFunction -> $DisplayFunction ,  
    AspectRatio -> Automatic ,  
    PlotRange -> {{-1.2,1.2},{-1.2,1.2}} ,  
    Ticks -> {{-1,-.5,.,5,1},{-1,-.5,.,5,1}} ,  
    Axes -> False ] ;
```

---

### **Literatur:**

- [1] Kowalewski, G. (Hrsg.): Die erste Integralrechnung, Eine Auswahl aus Johann Bernoullis Mathematischen Vorlesungen über die Methode der Integrale und anderes, Verlag von Wilhelm Engelmann, Leipzig 1914
- [2] Heinrich, W., Freudenthal, E.: Kaustiken in vektorieller Behandlung, MNU **12** (1959/60), 307-317
- [3] Freudenthal, E., Heinrich, W.: Grundkurven zu vorgegebenen Kaustiken, MNU **14** (1961/62), 70-76
- [4] Holditch, H.: On the  $n$ -th Caustic, by Reflexion from a Circle, Quart. J. Math. **2** (1858), 301-322

Das Bild zeigt die Katakaustik der 5. Ordnung ( $n = 5$ ) mit 601 Strahlen ( $k = 601$ ), wie es sich mit MATHEMATICA ergibt:

