erschienen in: *Physik in unserer Zeit* **29** (1998), 120-122

Kaustik in der Kaffeetasse

Christian Ucke und Christoph Engelhardt

Unter Physikern sind Kaustiken als ein Effekt der sphärischen Abberration bei Hohlspiegeln und Linsen wohlbekannt. Fast jeder hat das Phänomen schon beobachtet, auch wenn er den Namen nicht kennt. Ästhetisch ansprechende, herzförmige Figuren ergeben sich bei Mehrfachreflexionen in polierten Zylindern.

Der Physiker unterscheidet Diakaustiken von Katakaustiken. Erstere treten beim Durchtritt eines Lichtbündels durch ein optisches Medium auf. Die sphärische Aberration bei einer Linse ist dafür ein Beispiel. Als Katakaustik bezeichnet man die Einhüllende der an ebenen Kurven reflektierten Strahlen. Die bei Einfall eines Parallellichtbündels auf einen sphärischen Hohlspiegel entstehende Figur dient in vielen Physikbüchern als Beispiel. Genauer unterscheidet man Katakaustiken erster Art, bei sich eine punktförmige Lichtquelle im Endlichen befindet, während Katakaustiken zweiter Art durch Parallellichtbündel, also beipsielsweise durch eine punktförmige Lichtquelle im Unendlichen, verursacht werden.

Katakaustiken sind leicht zu beobachten und den meisten Menschen dadurch bekannt, daß sie bei schräg von der Sonne Kaffeetassen auftreten. Man spricht hier sogar von einer Kaffeetassenkaustik (Abbildung 1). Auch Teetrinker können die Erscheinung beobachten, vorausgesetzt, sie tun etwas Milch in den Tee, damit die Lichtreflexe auf der Oberfläche sichtbar werden.

Abb. 1: In einer Kaffeetasse kann man unter geeigneten Bedingungen eine Kaustik sehen. In diesem Fall wurde zur Verdeutlichung der Erscheinung eine hochreflektierende Folie in die Tasse eingepaßt.

Kaustiken haben schon früh das Interesse von Physikern und Mathematikern hervorgerufen. Christian Huygens (1629-1695) befaßte sich mit ihnen und Johann Bernoulli (1667 - 1748) untersuchte sie mathematisch ausführlich und in vielen Beispielen [1].

Die Kaustik in der Kaffeetasse verändert sich in charakteristischer Weise, wenn sich der Einfallswinkel der Lichtstrahlen ändert, also zum Beispiel, wenn die Sonne untergeht. [2, 3]. Dabei kann der Kaffee leicht kalt werden. Das Bild der Kaustik ändert sich auch, wenn man die Höhe des Kaffeespiegels in der Tasse durch Trinken bzw. durch Nachgießen ändert. Kaffeetassen sind für die Beobachtung des Phänomens aber gar nicht besonders geeignet.

erschienen in: *Physik in unserer Zeit* **29** (1998), 120-122

Ein zylindrischer, innen gut polierter und nicht allzu schmaler Ehering zeigt die gleiche Erscheinung. Noch besser ist ein kreisförmiger, innen polierter Messingring von etwa 4cm Innendurchmesser und 2cm Höhe geeignet, wie er sich in einer Werkstatt leicht herstellen läßt. Auf diese Weise sind die Abbildungen entstanden. Statt der Sonne kann man auch eine passabel punktförmige Halogenlampe verwenden.

Trifft ein Parallellichtbündel auf einen Hohlspiegel, ergibt sich zunächst die bekannte Katakaustik zweiter Art (siehe Abbildung 2a). Vom Einfallswinkel des Parallellichtbündels und der Höhe des Zylinderrandes hängt ab, welcher Anteil der Kaustik zu sehen ist. Mathematisch formuliert, handelt es sich bei der Begrenzungskurve der Kaustik um eine Epizykloide. Eine Epizykloide entsteht beim Abrollen eines Kreises auf einem anderen. Die Spitze der Epizykloide liegt auf halbem Abstand zwischen Kreismittelpunkt und Kreisrand.

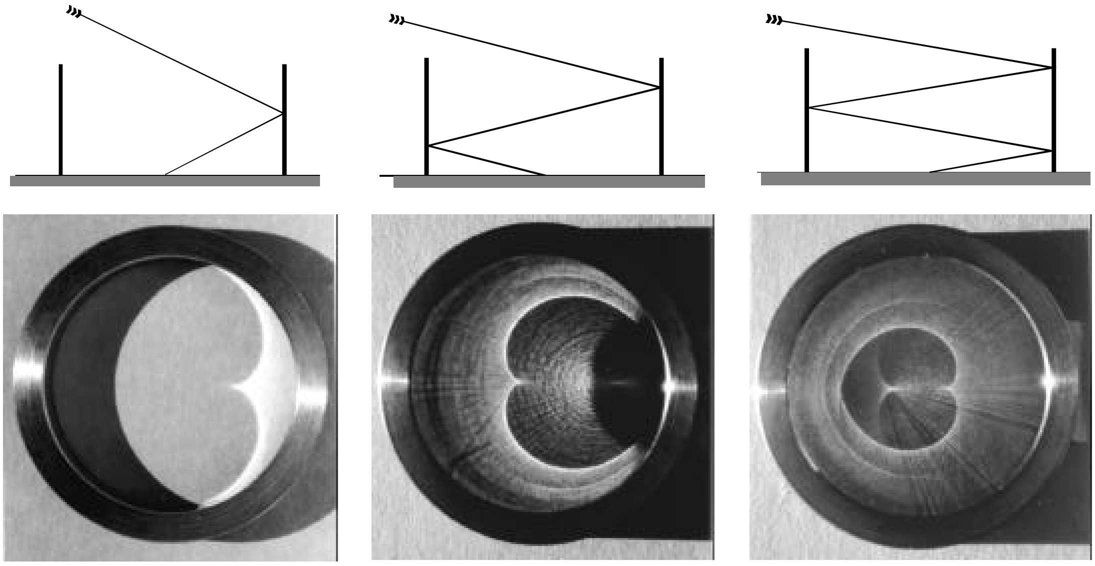

Abb. 2. (a) Die 'klassische Kaustik' ergibt sich bei einfacher Reflexion eines Parallellichtbündels bei einem bestimmten Einfallswinkel an der Innenseite eines polierten Hohlzylinders. Kompliziertere Kurven ergeben sich bei zweifacher (b) und dreifacher (c) Reflexion.

Läßt man die Lichtstrahlen flacher einfallen, ergibt sich eine herzförmige Erscheinung (Abbildung 2b). Diese Figur entsteht durch zweimalige Reflexion am inneren Hohlspiegel. Auch hier handelt es sich um eine Epizykloide. Der dunkle Teil entsteht durch Abschattung des Parallelstrahls am Rand des Hohlzylinders.

Bei dreifacher Reflexion der Lichtstrahlen im Zylinder wird die Kaustik noch komplizierter (Abbildung 2c). Bei noch flacherem Einfall des Lichts lassen sich Kaustiken beobachten, bei denen bis zu fünf oder sechs Reflexionen beteiligt sind. In der physikalischen Realität werden die Kaustiken mit zunehmender Reflexionsordnung immer lichtschwächer, da ein immer kleinerer Teil des Parallelstrahls überhaupt noch zur Erscheinung beiträgt.

Epizykloiden lassen sich sehr schön mit einem Spielzeug namens SPIROGRAPH erzeugen. Zahnräder verschiedener Größe können aufeinander abrollen. Mit einem durch die Löcher in den Zahnrädern gesteckten Schreibstift ergeben sich Rollkurven. In der Abbildung 3 sind gerade zwei Zahnräder gezeigt, mit denen sich die Kaustik der zweifachen Reflexion erzeugen läßt. Dabei rollt das große Zahnrad um das kleine Rad herum, wobei man die Kaustik sich mit einem auf dem Rand des großen Rades eingesteckten Schreibstift zeichnet.

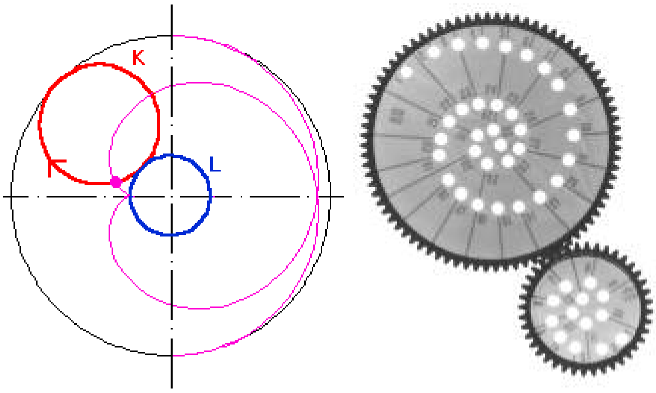

Abb. 3: Mit dem mathematischen Spielzeug SPIROGRAPH lassen sich Epizykloiden erzeugen. Die Kaustik der zweifachen Reflexion ergibt sich durch Abrollen des großen Rades K auf dem kleinen Rad L, wobei ein Randpunkt von K die Epizykloide durchfährt. K weist gerade den doppelten Durchmesser von L auf.

Schlußtip für verliebte Physiker: Es macht einen gewissen Eindruck, wenn man über einen geeigneten Ehering verfügt und an entsprechender Stelle zum richtigen Zeitpunkt ein Herz in seinem Ring vorführen kann.

Literatur:

[1] **Kowalewski, G.** (Hg.): Die erste Integralrechnung, Eine Auswahl aus Johann Bernoullis Mathematischen Vorlesungen über die Methode der Integrale und anderes,
Verlag von Wilhelm Engelmann, Leipzig 1914

[2] **Ucke, C.:** Playing with caustic phenomena, to be published in the conference proceedings of the ICPE-GIREP conference ‘New Ways of Physics Teaching’ Ljubljana, 21.-28.8. 1996

[3] **Ucke, C.; Engelhardt, C.:** Katakaustiken bei Mehrfachreflexionen**,** in: Fachverband Didaktik der Physik (Hg): 60. Physikertagung der DPG, Jena 1996, S. 237-242

[4] **Holditch, H.:** On the n-th caustic, by reflexion from a circle, Quarterly Journal of Mathematics 2 (1858), 301-322

Zu der Thematik Kaustik können per ftp einige Bilder in Farbe sowie eine bewegte Darstellung (AVI-File; abspielbar mit WINVIDEO) heruntergeladen werden:
http://www.e20.physik.tu-muenchen.de/~cucke/ftp/caustic

Die Autoren:

Christoph. Engelhardt, geboren 1971, studiert Physik und Mathematik an der Technischen Universität München und interessiert sich für interdisziplinäre Themen.

Christian Ucke ist unseren Lesern als langjähriger Autor von *Physik in unserer Zeit* bekannt

Anschriften

Dr. Christian Ucke, Physikdepartment E 20, Techn. Univ. München, 85747 Garching
Christoph Engelhardt, Hans-Pfann-Str. 74, 81825 München

erschienen in: *Physik in unserer Zeit* **29** (1998), 120-122

Geometrie der Kaustiken

Die mathematische Herleitung der erfolgt auf geometrischem Wege [3]. Sei n (n = 1, 2, ...) die Reflexionsordnung, die angibt wie oft ein einfallender Lichtstrahl an der Innenwand des Spiegels reflektiert worden ist (Abbildung unten). j sei der Polarwinkel des *1. Reflexionspunktes* gemessen *im Uhrzeigersinn* von der *positiven y*-Achse des in den Mittelpunkt des kreisförmigen Spiegels gelegten kartesischen Koordinatensystems. Jedem an der Innenwand des Spiegels (auch mehrfach) reflektierten Strahl des von links auf den Kreisspiegel einfallenden parallelen Lichtstrahlenbündels läßt sich so genau ein j zuordnen. r ist der Radius des Hohlspiegels (bzw. der Innenradius der Kaffetasse).

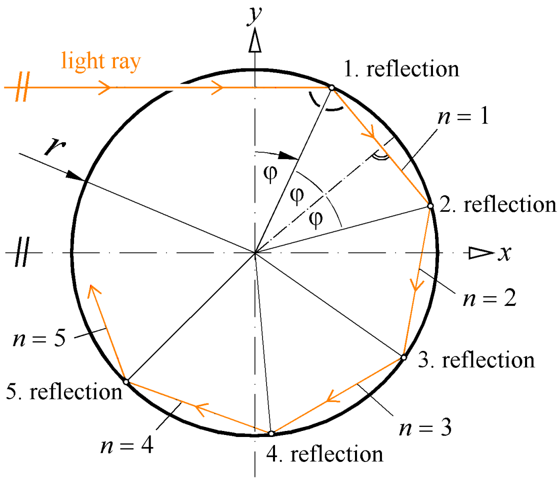

Abb. Zur mathematischen Ableitung der kaustischen Kurven dient diese Darstellung. Ein Lichtstrahl fällt von links ein und wird an der Innenseite mehrfach reflektiert

Die Kaustik der Ordnung *n* ergibt sich mathematisch als die Einhüllende der jeweils *n* mal an der Innenwand des Spiegels reflektierten Lichtstrahlen. Die Gleichung dieser Reflexionsstrahlenschar zur Reflexionsordnung *n* ergibt sich mit den in der Abbildung definierten Größen φ und *n* in dem in den Mittelpunkt des kreisförmigen Zylinderspiegels gelegten Koordinatensystem zu

$$x(j) = \frac{r}{4n}\left[(2n+1)\sin((2n-1)j) + (2n-1)\sin((2n+1)j)\right]$$

$$y(j) = \frac{r}{4n}\left[(2n+1)\cos((2n-1)j) + (2n-1)\cos((2n+1)j)\right]$$

Für festes n ist dies gerade die Parameterdarstellung einer *Epizykloide*.

Eine mathematische Ableitung dieser Mehrfachreflexionskaustiken wurde schon Mitte des vorigen Jahrhunderts von H. Holditch [4] gegeben. Die Arbeit ist allerdings mühsam zu besorgen und noch mühsamer nachzuvollziehen.

Mit heutigen mathematischen Programmpaketen (z.B. MATHEMATICA®) lassen sich die Kaustiken mit wenigen Programmzeilen grafisch darstellen. Dabei ergeben sich außerordentlich ästhetische Bilder. In der Abbildung ist die durch fünffache Reflexion entstehende Kaustik berechnet: