to be published in the proceedings of the conference of the German Physical Society, 23.-27.3.1998 in Regensburg
PREPRINT! may not be distributed FILE: SAKAIDE.DOC / VERSION 13.3.97

Kreisel aus Büroklammern

Christian Ucke
Technische Universität München, Physik Department E20, 85747 Garching,
ucke@e20.physik.tu-muenchen.de

Kreisel gehören zu den kindlichen Grunderfahrungen. Theorie ist zum Spielen nicht notwendig. Physiker befassen sich seit jeher wissenschaftlich mit der Thematik. Physikstudenten müssen reizvolle und auch schwierige Aufgaben dazu bearbeiten. Der japanische Professor Takao Sakai hat einige genial einfache Kreiselkonstruktionen erdacht, die Kinder und Wissenschaftler gleichermaßen in den Bann ziehen können.

Wie läßt sich aus einer Büroklammer ein Kreisel herstellen? Die Büroklammer steht hier stellvertretend für ein leicht verfügbares, kurzes und dünnes Drahtstück definierter Länge. Takao Sakai aus Japan hat dazu einige hübsche Ideen entwickelt [1]. Leider sind sie in japanisch publiziert. Da diese Sprache nicht gerade zum üblichen Wissenstand eines Mitteleuropäers zählt und außerdem die Zeitschrift 数理科学 in Deutschland nur in Hannover vorhanden ist, habe ich einen japanischen Kollegen gebeten, mir die wichtigsten Partien zu übersetzen. Einiges daraus kann man sich sogar ohne japanisch-Kenntnisse erschließen, da physikalische Formeln in lateinischer Schrift und Zeichnungen auch so verständlich sind. Ich werde hier einen Auszug aus der Publikation von Takao Sakai darstellen und einige eigene Gedanken dazutun. (Abb. 4, 5 und anschließende Teile).

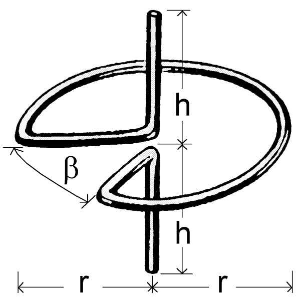


Abb. 1: Eine Büroklammer kann so zu einem Kreisel gebogen werden.

Zur Realisierung des Kreisels biege man eine Büroklammer zunächst zu einem gerade Stück Draht und dann derart in einem Kreisbogen mit zwei Speichen um eine Achse, daß der Schwerpunkt genau in der Achse liegt (Abb. 1). Der Winkel *ß* muß dazu eine Größe von *53.13°* aufweisen*.* Die Berechnung dieses Winkel ist eine reizvolle Aufgabe für Physikstudenten in den ersten Semestern. Der Bau und das Laufenlassen des Kreisels ist eine unterhaltsame Übung für Kinder und Wissenschaftler [2].

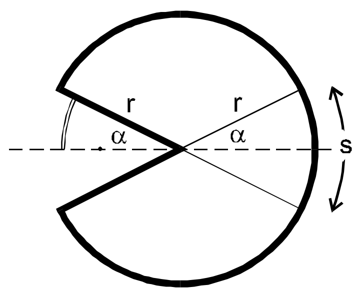


Abb. 2: Der Büroklammerkreisel in der Aufsicht.

In Abb. 2 ist der Kreisel in Aufsicht dargestellt. Ist der Winkel zwischen den Speichen zu groß oder zu klein, liegt der Schwerpunkt offensichtlich nicht im Kreismittelpunkt. Zur Berechnung des notwendigen Winkels kann man sich auf die

Betrachtung des Schwerpunkts der beiden Speichen und des gegenüberliegenden Kreisbogenstücks *s* beschränken. Die anderen Teile des Kreisbogens sind symmetrisch zum Mittelpunkt und brauchen deswegen nicht berücksichtigt zu werden. Zur bequemeren Berechnung werde der halbe Speichenwinkel a eingeführt.

In Abb. 3 sind die Speichen und der Kreisbogen *s* herausgehoben. Der Koordinatenursprung liege im Kreismittelpunkt. Der Abstand zwischen dem Schwerpunkt des Kreisbogens und dem Kreismittelpunkt sei x_1. Da der Kreisbogen *s* symmetrisch zur x-Achse liegt, ergibt sich der Schwerpunkt des Bogens aus dem Linienintegral

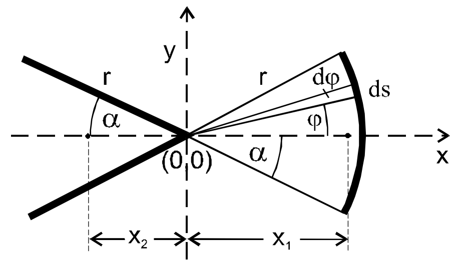


Abb. 3: Zur Berechnung des Schwerpunkts werden nur die Speichen und das gegenüberliegende Kreisbogenstück betrachtet.

$$x_1 = \frac{1}{s}\int x ds = \frac{1}{s}\int_{-a}^{a} r \cdot \cos j \cdot r \cdot dj =$$

$$= \frac{2 \cdot r^2}{s}\sin a = \left(r\frac{\sin a}{a} \right)$$

Mit r als Dichte pro Längeneinheit ergibt sich die Masse des Kreisbogens zu $m_1 = s \cdot r$. Bezüglich des Koordinatenursprungs ergibt sich ein Moment von $M_1 = m_1 \cdot x_1 = 2 \cdot r^2 \cdot r \cdot \sin a$.

Der Schwerpunkt der Speichen liegt bei $x_2 = r/2 \cdot \cos a$; die Masse ist $m_2 = 2 \cdot r \cdot r$. Das von den Speichen bezüglich des Koordinatenursprungs bewirkte Moment folgt zu $M_2 = m_2 \cdot x_2 = r^2 \cdot r \cdot \cos a$.

Aus der Gleichsetzung $M_1 = M_2$ ergibt sich die überraschend einfache Bestimmungsgleichung $\tan a = 0.5$, d.h. $a = 26.565^0$. Der Winkel zwischen den Speichen ist folglich $ß = 2a = 53.13^0$.

Die vorhergehenden Betrachtungen erfordern Integralrechnung, die in Schulen nicht allgemein vorausgesetzt werden kann. Der Winkel a kann jedoch auch näherungsweise ohne Integral abgeschätzt werden. Dazu wird der Kreisbogen durch eine Sehne ersetzt (Abb.4) Der Schwerpunkt der Sehne ergibt sich aus dem Radius r zu $x_1 = r \cdot \cos a$, die Masse zu $m_1 = 2 \cdot a_1 \cdot r = 2 \cdot r \cdot r \cdot \sin a$. Das resultierende Moment folgt zu $M_1 = m_1 \cdot x_1 = 2 \cdot r^2 \cdot r \cdot \sin a \cdot \cos a$. Setzt man wieder $M_1 = M_2$ (M_2 ist schon vorher bestimmt worden), ergibt

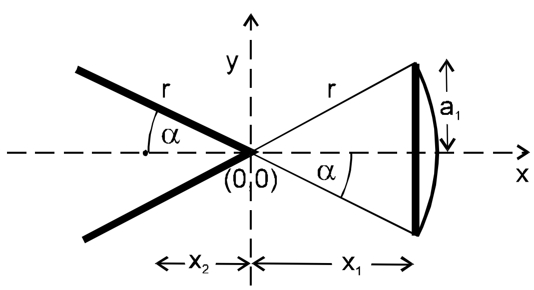


Abb. 4: Der Kreisbogen wird zur näherungsweisen Berechnung durch eine Sehne ersetzt.

sich $\sin a = 0.5$ bzw. $a = 30^0$. Der Winkel ist jetzt etwas größer als der exakt berechnete, da der Schwerpunkt der Sehne näher zum Koordinatenursprung liegt.

Noch besser ist natürlich eine Näherung, bei der der Kreisbogen durch zwei Sehnenstücke ersetzt wird (Abb.5). Die sich dann ergebende transzendente Bestimmungsgleichung für α kann leicht mit heutigen Rechnern numerisch gelöst werden. Der Winkel ergibt sich zu 27.2°, und das ist schon sehr gut am exakt berechneten Wert.

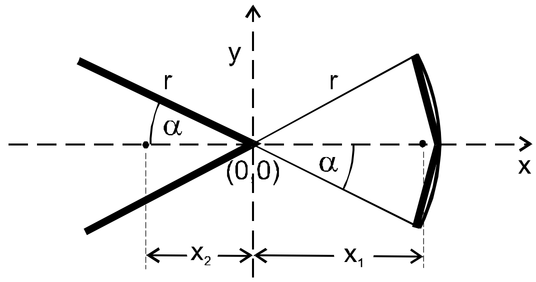


Abb. 5: Eine Näherung des Kreisbogens durch zwei Sehnenstücke ist schon fast optimal.

Mit Hilfe einer kleinen Flachzange kann so ein Kreisel aus einer Büroklammer hergestellt werden. Im Notfall geht es sogar mit den Fingern. Besonders geeignet sind Büro- bzw Aktenklammern mit Kugelenden. Möchte man den oberen Teil der Drehachse gleichlang dem unteren Teil der Achse und darüberhinaus so groß wie der Radius machen, ergibt eine kleine Rechnung, daß der obere Teil ungefähr 1/10 der Gesamtlänge der zu einem geraden Drahtstück gebogenen Büroklammer sein muß. Das genaue Biegen des Kreisbogens und das Einhalten des korrekten Winkels zwischen den Speichen ist nicht ganz einfach. Glücklicherweise kommt es nicht so genau darauf an, da man durch nachträgliches Verbiegen des Drahtes den Schwerpunkt immer noch in die Achse bringen kann. Eine anspornende Aufgabe besteht darin, jedes Mitglied einer Gruppe derartige Kreisel herstellen zu lassen und dann zu vergleichen, welches Stück am besten läuft.

Falls der Schwerpunkt des Kreisels nicht in der Achse liegt, ist der Kreisel - statisch - nicht ausgewuchtet. Bei einem nicht ausgewuchteten Autorad führen solche Unwuchten zu starken Belastungen der Lager, die Achse behält jedoch ihre Lage. Beim Autorad werden zum Auswuchten kleine Gewichte am Felgenrand angebracht. Beim Kreisel führen Unwuchten zu irregulären Bewegungen der Kreiselachse, die ja im Gegensatz zur Achse eines Autorades nicht in einem festen Lager läuft. Beim Kreisel läßt sich das - statische - Auswuchten durch ein geeignetes Verbiegen des Drahtes ebenfalls erreichen. Ein Rotationskörper ist dynamisch ausgewuchtet, wenn die Drehachse mit einer Hauptträgheitsachse übereinstimmt. Das dynamische Auswuchten ist hier gewährleistet, wenn darüberhinaus die Drehachse senkrecht zu den in einer Ebene befindlichen Speichen und Kreisbogen orientiert ist.

Der Kreisel kann mit den Fingern bis auf einige tausend Umdrehungen pro Minute gebracht werden. Rotiert er schnell, sieht man nur noch einen freischwebenden Kreisring um die Achse.

Die Drehzahl des Kreisels läßt sich grob aus folgender Überlegung abschätzen. Hält man die Kreiselachse zwischen Zeigefinger und Daumen, erreichen Finger bzw. Daumen etwa eine Geschwindigkeit von *v = 0,1m/s.* Der Drahtdurchmesser beträgt etwa *d = 1mm,* d.h. der Radius *r = 0.5 mm*. Daraus ergibt sich $w = v/r = 0.1m/s/0.5mm = 200s^{-1}$ bzw. $f = 200s^{-1}/2p = 32s^{-1} = 1900U/m$. Mit stroboskopischer Beleuchtung lassen sich sogar noch weit größere Drehzahlen bestätigen.

Der Sakai-Kreisel ist im Sinne der theoretischen Physik ein sogenannter unsymmetrischer Kreisel, d.h. die Trägheitsmomente in zwei zueinander senkrechten Richtungen in der x-y-Ebene sind unterschiedlich (I_x ¹ I_y). Diese Trägheitsmomente zu berechnen erfordert etwas mehr Aufwand. Aus Abb. 6 läßt sich ableiten:

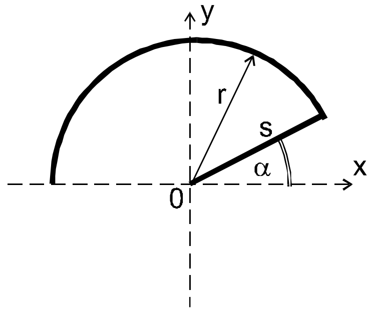


Abb. 6: Berechnung des Trägheitsmoments. Es wird nur die Hälfte des Kreisels in Aufsicht in der x-y-Ebene gezeigt.

$$I_x = 2\cdot\left[\int_0^r (s\cdot\sin a)^2\, r\cdot ds + \int_a^p (r\cdot\sin j)^2\, r\cdot r\cdot dj + \frac{1}{3}\, r\cdot h^3\right]$$

$$= 2r\cdot r^3\left[\frac{\sin^2 a}{3} + \frac{p}{2} - \frac{a}{2} + \frac{\sin 2a}{4} + \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{h}{r}\right)^3\right]$$

$$I_y = 2\cdot\left[\int_0^r (s\cdot\cos a)^2\, r\cdot ds + \int_a^p (r\cdot\cos j)^2\, r\cdot r\cdot dj + \frac{1}{3}\, r\cdot h^3\right]$$

$$= 2r\cdot r^3\left[\frac{\cos^2 a}{3} + \frac{p}{2} - \frac{a}{2} - \frac{\sin 2a}{4} + \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{h}{r}\right)^3\right]$$

Das Trägheitsmoment bezüglich der z-Achse ist

$$I_z = 2\cdot r\cdot r^3\cdot\left(\frac{1}{3} + p - a\right)$$

Für ein bestimmtes Verhältnis h/r ($1.62 \le h/r \le 1.68$) liegt I_z gerade zwischen I_x und I_y (Abb.7). Eine freie Rotation eines derartigen Kreisels um diese Achse des mittleren Trägheitsmoments wäre dann nicht stabil. Das ist aber nur zu realisieren, indem man den rotierenden Kreisel in die Luft wirft, was gewisse Schwierigkeiten verursacht. Astronauten könnten das im schwerefreien Raum natürlich optimal durchführen. Theoretischen Physikern ist darüberhinaus ein unsymmetrischer Kreisel nicht sehr sympathisch, da er mathematisch schwieriger zu handhaben ist. Wie kommt man also zu einem symmetrischen Kreisel?

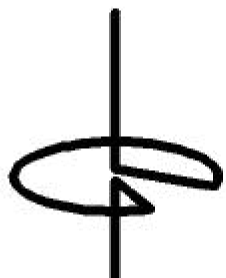


Abb. 7: Ein kritischer Sakai-Kreisel, bei dem gerade das mittlere Trägheitsmoment in der z-Achse liegt (h = 1,65·r; maßstabsgerechte Abbildung).

In Abb. 8 ist eine Lösung gezeigt, die ebenfalls auf Takao Sakai zurückgeht. Hat der Winkel α zwischen den Speichen gerade den richtigen Wert, gilt $I_x = I_y$. Die Berechnung dieses Winkels wird mit Abb. 9 verdeutlicht. In ganz ähnlicher Weise wie bei der vorhergegangenen Rechnung ergibt sich für ein Viertel des Kreisels für I_x und I_y :

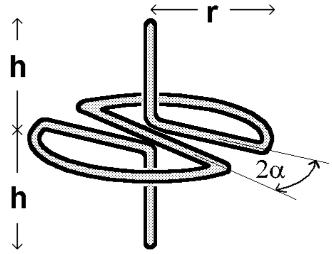
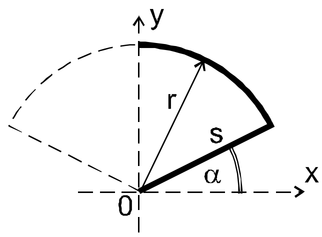


Abb. 8: Konstruktion eines symmetrischen Büroklammerkreisels.

$$I_x = \int_0^r (s \cdot \sin a)^2 \, r \cdot ds + \int_a^{p/2} (r \cdot \sin j)^2 \, r \cdot r \cdot dj$$

$$= r \cdot r^3 \left[\frac{\sin^2 a}{3} + \frac{p}{4} - \frac{a}{2} + \frac{\sin 2a}{4} \right]$$



$$I_y = \int_0^r (s \cdot \cos a)^2 \, r \cdot ds + \int_a^{p/2} (r \cdot \cos j)^2 \, r \cdot r \cdot dj$$

$$= r \cdot r^3 \left[\frac{\cos^2 a}{3} + \frac{p}{4} - \frac{a}{2} - \frac{\sin 2a}{4} \right]$$

Abb. 9: Berechnung der Trägheitsmomente des symmetrischen Kreisels. Aufsicht auf ein Viertel des Kreisels.

Setzt man $I_x = I_y$ ergibt sich *tan2a = 2/3* bzw. *2a = 33.69⁰ (= 0,588rad).*

Eine interessante und gut berechenbare Größe ist die kritische Rotationsfrequenz, unterhalb der symmetrische Kreisel bei Störungen nicht mehr stabil drehen [3]. Es gilt

$$w_{krit} = \sqrt{\frac{4mghI_x}{I_z^2}} \qquad bzw. \qquad f_{krit} = \frac{\sqrt{mghI_x}}{pI_z}$$

Von mir verwendete Büroklammern (Norica Büroklammern Nr. 575 mit Kugelenden) haben eine Masse m = 0,73g und ρ = 0,0753g/cm. Unter der Voraussetzung h = r = 0,087cm, wie sie in Abb.8 bezeichnet ist, errechnet sich

$$I_x = 4{,}0 \cdot 10^{-9}\, kgm^2 \quad \text{bzw.} \quad I_z = r \cdot r^3 \left[\frac{4}{3} + 2(p - 2a) \right] = 3{,}2 \cdot 10^{-8}\, kgm^2$$

und $f_{krit} = 5{,}0\ s^{-1} = 300\ U/min$

Diese Frequenz ist beim Andrehen mit den Fingern bequem zu überschreiten. Das ist die Voraussetzung dafür, daß der Kreisel überhaupt gut läuft.

Die konkrete Realisierung dieses Kreisels ist deswegen etwas schwieriger, weil die vielen Speichen einen Großteil der Gesamtlänge einer Büroklammer verbrauchen. Dadurch wird die Achse und der Gesamtkreisel etwas kompakt. Zur Abhilfe gehe man auf die nächste Büroklammergröße über. Zu groß dürfen derartige Kreisel aber nicht werden. Sie sind bei zu großem Trägheitsmoment nicht mehr gut anzudrehen. Es ist verblüffend, daß gerade Büroklammern eine optimale Größe aufweisen.

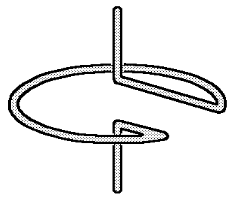


Abb. 10: Welchen Einfluß hat ein Abweichen der Speichen aus der Kreisebene?

Sakai-Kreisel rufen geradezu weitere Fragen hervor. Welchen Effekt haben z.B. die abgerundeten Ecken, die sich notwendigerweise bei der Verwirklichung des Kreisels aus Draht ergeben? Welchen Einfluß auf den Winkel zwischen den Speichen hat es, wenn die Speichen aus der Kreisbogenebene symmetrisch nach oben bzw. unten abweichen (Abb. 10), wobei der Schwerpunkt in der Achse bleibt? Auch dies muß ja bei der Realisierung eines Kreisels aus Draht berücksichtigt werden. Lassen sich noch weitere symmetrische Kreisel denken und konstruieren? Wie muß die Konstruktion eines Kreisels beschaffen sein, bei dem die Speichen beide parallel zur Achse hin laufen (Abb. 11) und der Schwerpunkt in der - unsymmetrisch bezüglich des Kreises - Achse liegt? Es lassen sich auch Kreisel konstruieren, die statt eines Kreisbogens eine quadratische Form aufweisen. Diese lassen sich dann sogar ohne Integrale berechnen.

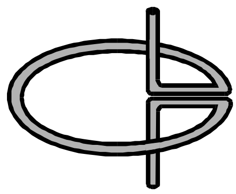


Abb. 11: Ein weiterer Büro klammerkreisel nach Sakai.

Literatur

1. **Sakai, Takao:** Topics on tops which enable anyone to enjoy himself, Mathematical Sciences (Suri-kagaki = 数理科学), No. 271, January 1986, p. 18-26
2. **Bürger, Wolfgang:** Der paradoxe Eierkocher, Birkhäuser Verlag, Basel 1995
3. **Kuypers, Friedhelm:** Klassische Mechanik, Verlag VCH-WILEY, Weinheim 1997
4. Einige Bilder von rotierenden Sakai-Büroklammerkreiseln (animated gif-pictures) sind unter folgender Internet-Adresse anzusehen: http://www.e20.physik.tu-muenchen.de/~cucke/ftp/lectures/sakaigir.htm