This publication appeared in **MNU** (Mathematisch-Naturwissenschaftlicher Unterricht) **48**/5 (1995), 259-263

Zwei-Scheiben-Roller

Verfasser: Christoph Engelhardt, Hanns-PfannStr. 74, 81825 München,
Dr. Christian Ucke, Techn. Univ. München, Physikdepartment E 20, 85747 Garching

Verbindet man zwei kongruente Ellipsenscheiben senkrecht zueinander in definiertem Abstand und läßt das so entstandene Gebilde auf einer Ebene abrollen, bleibt der geometrische Schwerpunkt in konstanter Höhe über der Ebene. Die Bahn des Schwerpunkts ist allerdings nicht mehr geradlinig. Die Bedingungen zur Konstruktion derartiger Zwei-Scheiben-Roller werden abgeleitet. Die Bahn des Schwerpunkts wird qualitativ beschrieben. Es ergeben sich bei der Konstruktion der Verbindungstorse von Zwei-Scheiben-Rollern ästhetisch ansprechende Körper.

1 Einführung

Eine homogene Kugel rollt auf einer Ebene und dabei bleibt der Abstand des Schwerpunkts über der Ebene konstant. Wirken keine ablenkenden Kräfte, ist die Bahn des Schwerpunktes eine Gerade. Gleiches ist beim Zylinder der Fall. Es gibt weitere Objekte, für die das zutrifft. Man kann sich aus einem Zylinder zwei mit ihren Mittelpunkten zusammenfallende, dünne Ellipsenscheiben ausgeschnitten denken, die auf ihren Kanten ebenfalls unter Beibehaltung des Schwerpunktabstandes abrollen. Sie liegen immer gerade auf zwei Berührpunkten auf. Die Ellipsen sind im einfachsten Fall kongruent (Abb.1). Sie können aber auch unterschiedlich groß sein und brauchen nicht einmal mit ihren Mittelpunkten zusammenzufallen. Es müssen nicht einmal Ellipsen sein. Jede Kombination von Schnittflächen mit dem Zylinder, bei der der Gesamtschwerpunkt in der Achse des Zylinders liegt, ist geeignet. Ellipsen, insbesondere symmetrisch zueinander befindliche Ellipsen entsprechen vermutlich eher einem gewissen Harmonieverständnis.

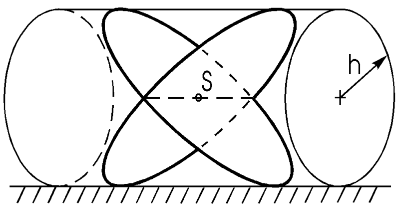

Abb.1: Zwei kongruente und mit ihrem Mittelpunkt zusammenfallende Ellipsen, die aus einem Zylinder ausgeschnitten sind, halten ihren Schwerpunkt beim Abrollen auf einer Ebene in konstantem Abstand von der Ebene.

Etwas anders liegt der folgende Fall: Verbindet man zwei dünne und gleiche Ellipsenscheiben (*a, b* = große, kleine Halbachse; $a \geq b/\sqrt{2}$) senkrecht zueinander entlang der Halbachse a im Abstand $c = \sqrt{4a^2 - 2b^2}$ der Ellipsenmittelpunkte (Abb.2), so bleibt beim Abrollen auf einer Ebene der Abstand des geometrischen Schwerpunkts dieses Objekts von der Ebene ebenfalls konstant. Allerdings ist die Bahn des Schwerpunkts nicht mehr *geradlinig*.
Für $a = b = r$ (r = Radius des Kreises) ergibt sich der Spezialfall für Kreisscheiben. Der Zentralabstand beträgt dann $c = \sqrt{2} \cdot r$. Vergrößert oder verkleinert man ohne Variation der Halbachsen *a* und *b* den Abstand *c*, bleibt der Schwerpunktabstand nicht mehr konstant. Für $c = 0$ und $c \to \infty$ ergeben sich weitere Sonderfälle. Mit kreis- und ellipsenförmigen Bierdeckeln (Abb.3) läßt sich das sehr schön realisieren.

Wegen der torkelnden Bewegung des Schwerpunkts werden die Zwei-Scheiben-Roller im Englischen auch *Wobbler* (to wobble - torkeln, taumeln) genannt.

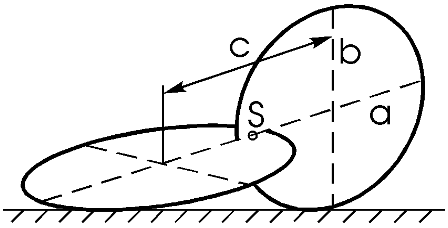

Abb.2: Zwei kongruente Ellipsen, die in einem definiertem Abstand c senkrecht zueinander verbunden werden, haben ebenfalls einen konstanten Schwerpunktabstand von der Ebene, auf der sie aufliegen.

Abb.3: Mit Bierdeckeln lassen sich Zwei-Scheiben-Roller günstig realisieren. Hier ist das für ellipsenförmige Bierdeckel dargestellt. Für diese Bierdeckel gilt:
$a = 5.3cm$; $b = 4.6cm$; $c \approx 8.4cm$

Wie es gerade zu dieser überraschend einfachen Formel kommt, wollen wir im folgenden zeigen. Für Kreisscheiben ist die Formel schon lange bekannt [1], die Durchrechnung auch veröffentlicht [2]. Die Verallgemeinerung für Ellipsenscheiben sowie weitere aufgeführte Besonderheiten haben wir nicht publiziert gefunden.

2 Ableitung der Abstandsbedingung

Wir wählen für die beiden senkrecht zueinander stehenden Ellipsenränder in einem körperfesten, cartesischen Koordinatensystem einen Parameteransatz der Form (vgl. Abb.4)

(1) Ellipse 1 $\quad x = a \cdot \sin j + \frac{c}{2} \qquad y = b \cdot \cos j \qquad z = 0$

(2) Ellipse 2 $\quad x = a \cdot \sin y - \frac{c}{2} \qquad y = 0 \qquad z = b \cdot \cos y$

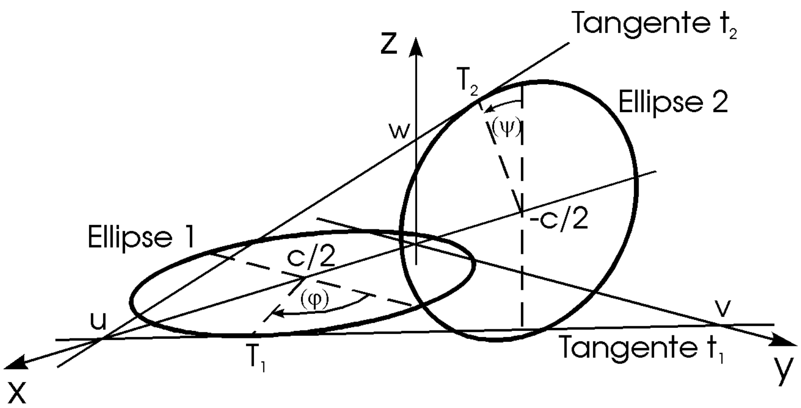

Abb.4: Skizze zur Lage der Ellipsen und Wahl eines geeigneten Koordinatensystems. Im Fall von Kreisen lassen sich die Parameter j und y Winkeln bei den Kreismittelpunkten zuordnen.

a, b bedeuten die Halbachsen, c ist der Abstand der Mittelpunkte der Ellipsen. Die Ellipse 1 liegt in der x/y-Ebene und hat ihren Mittelpunkt auf der x-Achse im Abstand c/2 vom Nullpunkt des Koordinatensystems. Die Ellipse 2 liegt analog in der x/z-Ebene und damit senkrecht zur Ellipse 1. Der Schwerpunkt dieser Ellipsenkombination liegt also im Nullpunkt.

Eine Tangente t_1, die im Punkt $T_1(\varphi)$ die Ellipse 1 berührt, läßt sich darstellen als

(3) $$b \cdot x \cdot \sin\varphi + a \cdot y \cdot \cos\varphi = a \cdot b + \frac{b \cdot c}{2} \cdot \sin\varphi$$

Die Achsenabschnitte dieser Tangente folgen daraus zu

(4) $$u = \frac{a}{\sin\varphi} + \frac{c}{2} \quad ; \quad v = \frac{b \cdot u}{a} \cdot \tan\varphi$$

Genauso findet man die Achsenabschnitte einer Tangente t_2, die die Ellipse 2 im Punkt $T_2(\psi)$ berührt und die durch den Achsenabschnitt u geht:

(5) $$u = \frac{a}{\sin\psi} - \frac{c}{2} \quad ; \quad w = \frac{b \cdot u}{a} \cdot \tan\psi$$

Daraus ergibt sich eine Kopplungsbedingung für φ und ψ:

(6) $$\frac{a}{\sin\psi} - \frac{a}{\sin\varphi} = c$$

Die Tangenten t_1 und t_2 liegen mit den beiden Punkten T_1 und T_2 auf einer gemeinsamen Tangentialebene τ , die sich in der Achsenabschnittsform direkt schreiben läßt als

(7) $$\tau : \quad \frac{x}{u} + \frac{y}{v} + \frac{z}{w} = 1$$

Mit Hilfe von (4) und (5) kann man die Tangentialebene auf die Form bringen:

(8) $$\tau : \quad b \cdot x + a \cdot y \cdot \cot\varphi + a \cdot z \cdot \cot\psi = b \cdot u$$

Diese Tangentialebene ist im Laborsystem die Abrollebene.
Diese Ebene hat den folgenden Abstand h vom Nullpunkt des Koordinatensystems; h stellt zugleich den Abstand des Schwerpunktes von der Tangential-(abroll)-ebene dar:

(9) $$h = b \cdot u \big/ \sqrt{q} \qquad \text{mit} \quad q = b^2 + a^2 \cot^2\varphi + a^2 \cot^2\psi$$

ψ läßt sich mit Hilfe der Kopplungsbedingung (6) eliminieren, so daß man schließlich zu folgendem Ergebnis gelangt:

(10) $\quad h = b\cdot\left(a + \frac{c}{2}\cdot\sin\varphi\right) \Big/ \sqrt{Q} \qquad \text{mit} \quad Q = (b^2 + c^2 - 2a^2)\sin^2\varphi + 2ac\sin\varphi + 2a^2$

Der Abstand h hängt also im allgemeinen vom Parameter φ ab. Wenn die Diskriminante des in $\sin^2\varphi$ quadratischen Polynoms Q verschwindet, was der Fall ist für

(11) $$c^2 = 4a^2 - 2b^2$$

ergibt sich allerdings gerade $Q = \left[\sqrt{2a^2 - b^2}\,\sin\varphi + \sqrt{2}a\right]^2$ und damit folgt dann für h der konstante Wert

(12) $$h = b\Big/\sqrt{2}$$

Aus der Bedingung (11) ergibt sich, daß der Roller nur für $c^2 \geq 0$ reell existiert. Daraus folgt $a \geq b\big/\sqrt{2}$. Im Grenzfall $c = 0$ ergibt sich $a = b\big/\sqrt{2}$. Das ist dann ein Abbildung 1 entsprechender Fall mit zwei aus einem Zylinder ausgeschnittenen, kongruenten Ellipsen, die mit ihrem Mittelpunkt zusammenfallen und zusätzlich senkrecht zueinander stehen.

Verbindet man die Auflagepunkte des Zwei-Scheiben-Rollers mit Geradenstücken, erhält man die zugehörige Verbindungstorse (Abb.5). Da der Zwei-Scheiben-Roller in der Ebene abrollt, ist diese Verbindungstorse auf die Ebene abwickelbar. Markiert man sich bei einem realen Zwei-Scheiben-Roller die aufeinanderfolgenden Berührpunkte auf Papier, kann man sich die Verbindungstorse ausschneiden und zusammenkleben, was einen sehr ästhetischen Körper ergibt. Mit (6) lassen sich außerdem sehr anschauliche Modelle der Verbindungstorse bauen, indem man zum Beispiel bei einem Zwei-Scheiben-Roller aus dünnen Holzscheiben einige gemäß (6) berechnete Auflagepunkte der Scheibenränder mit Bindfaden verbindet.
Im obigen Spezialfall $c = 0$ reduziert sich der von der Verbindungstorse berandete Körper auf den Schnittkörper zweier kongruenter *Drehzylinderkörper* (Radius $r = h = b\big/\sqrt{2}$), deren Achsen einander senckrecht schneiden (Abb.6). Im (physikalisch unrealistischen) Grenzfall $c \to \infty$ - gleichbdeutend mit $a \to \infty$ bei konstant gehaltenem b - geht die Verbindungstorse in einen (*unendlich* langen) *Drehzylinder* mit dem Radius $r = h = b\big/\sqrt{2}$ über.

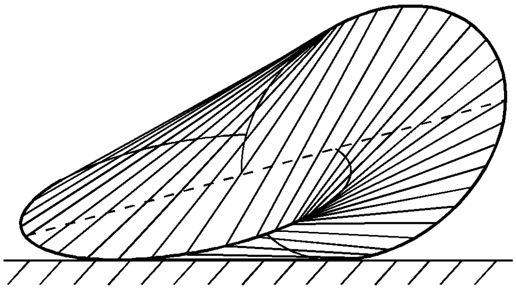

Abb.5: Die Schar der Verbindungsgeraden der Auflagepunkte ergeben die Verbindungstorse. Aus Holzscheiben und Bindfaden lassen sich sehr anschauliche Modelle bauen.

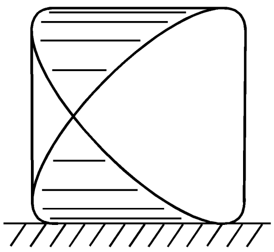

Abb.6: Für c = 0 berandet die Verbindungstorse den Schnittkörper zweier kongruenter Drehzylinder(-körper), deren Achsen einander senkrecht schneiden.

3 Bahn des Schwerpunkts

Ein weiteres Problem ist die schlangenförmige Bahn des Schwerpunkts beim Abrollen auf einer Ebene. Um diese Frage zu behandeln, machen wir folgende Überlegungen :

Die um den Ursprung mit dem Radius $h = b/\sqrt{2}$ geschlagene Kugel

$$(13) \qquad \Sigma: \quad x^2 + y^2 + z^2 = \frac{b^2}{2}$$

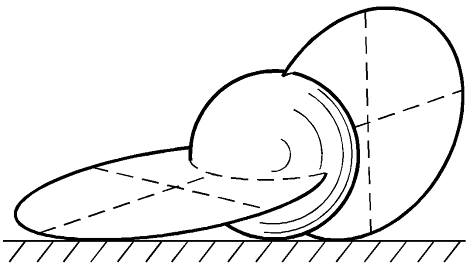

Abb.7: Die eingezeichnete Kugel berührt beim Abrollen des Zwei-Scheiben-Rollers die Ebene. Wir nennen sie die Berührkugel.

berührt jede der Ebenen τ (7) in einem bestimmten Punkt T(X , Y , Z) . Die von den Ebenen τ umhüllte Torse ist daher der Kugel längs einer bestimmten Raumkurve *l* umschrieben. Durch Koeffizientenvergleich der äquivalenten Darstellungen

$$(14) \qquad \tau: \quad X \cdot x + Y \cdot y + Z \cdot z = \frac{b^2}{2}$$

und (8) ergeben sich die Koordinaten von T mit (4) und (5) zu

$$(15) \quad X = \frac{b^2}{2u} \;,\; Y = \frac{a \cdot b}{2u} \cdot \cot \varphi \;,\; Z = \frac{a \cdot b}{2u} \cdot \cot \psi \quad \text{mit} \quad u = \frac{a}{\sin \varphi} + \frac{c}{2} = \frac{a}{\sin \psi} - \frac{c}{2}$$

Dies ist schon eine Parameterdarstellung der Berührlinie *l* - wahlweise anschreibbar in φ oder ψ allein. Die Elimination von φ und ψ in (15) zeigt , daß *l* auf den beiden kongruenten *elliptischen* Zylindern

$$(16) \quad \frac{(X + \frac{c}{2})^2}{a^2} + \frac{2Y^2}{a^2} = 1 \quad \text{und} \quad \frac{(X + \frac{c}{2})^2}{a^2} + \frac{2Z^2}{a^2} = 1 \quad \text{mit} \quad c = \sqrt{4a^2 - 2b^2}$$

verläuft .

Mit (13) und (16) ergibt sich schließlich die Koordinatendarstellung der Berührlinie l im körperfesten System des Scheibenpaares zur Schnittkurve der Kugel Σ mit dem *hyperbolischen Paraboloid* Λ :

$$(17) \qquad l: \qquad \Sigma: \; x^2+y^2+z^2=\frac{b^2}{2} \quad , \quad \Lambda: \; c\cdot x+y^2-z^2=0$$

Gleichfalls erhält man l als Schnittkurve zwischen der Rollertorse und Λ . Dem Aussehen nach könnte man l als "*Tennisballkurve*" bezeichnen (Abb.8).

Beim Abwälzen des Rollers auf einer Ebene rollt die Kugel Σ entlang dieser Kurve l ab .
Die dabei entstehende Abdruckspur von l auf der Ebene ist translationskongruent zur Schwerpunktsbahn β des Rollers. Diese Spur zu berechnen übersteigt den Rahmen dieser Arbeit. Doch auch ohne Rechnung lassen sich noch einige Aussagen über die Bahn des Schwerpunkts machen.

Für $0<c<\infty$ - gleichbedeutend mit $a>b/\sqrt{2}$ - erhält man qualitativ die " *Tennisballkurve* " (Abb.8). Die Schwerpunktsbahn β ist dann aufgrund der Symmetrie von l eine *periodische*, *sinus*-ähnliche Kurve deren *Periode* und *Amplitude* von c (11), und damit von den Halbachsen a und b der Ellipsenscheiben abhängt.

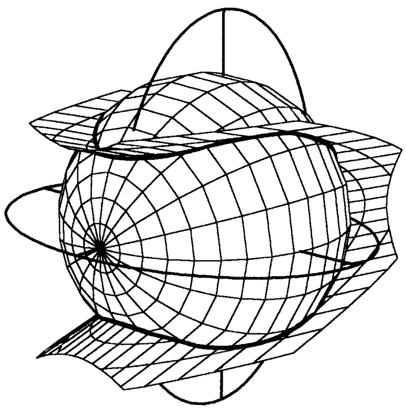

Abb.8: Beim Abwälzen des Zwei-Scheiben-Rollers auf einer Ebene rollt die Berührkugel entlang einer 'Tennisballkurve' ab, hier dargestellt als Schnittkurve zwischen der Berührkugel und einem hyperbolischen Paraboloid. Für das Verhältnis der Halbachsen der Ellipsenscheiben gilt in dieser Abbildung: $a=0.72\cdot b$
Der Zentralabstand ergibt sich dann zu $c=\sqrt{0.0736}\cdot b$

Im Grenzfall $c\to\infty$ reduziert sich das Paraboloid Λ im körperfesten System auf die y/z-Ebene $(x=0)$. l ist dann ein in der y/z-Ebene um den Nullpunkt mit dem Radius $r=b/\sqrt{2}$ geschlagener Kreis, der beim Abrollen der Kugel Σ auf einer Ebene eine *gerade* Linie als Abdruckspur liefert. Damit nähert sich die Bahn des Schwerpunkts für Ellipsenscheiben mit $a >> b$ einer *geraden* Linie an; die *Amplitude* von β strebt also gegen *Null*.

Für $c=0$, also $a=b/\sqrt{2}$ ergibt sich Λ zu dem zueinander senkrechten Ebenepaar $|y|=|z|$.
l stellt sich somit als ein in diesem Ebenenpaar liegendes Paar kongruenter Kreise (Radius r = a) um den Nullpunkt dar (Abb.9). Die Schwerpunktsbahn β läßt sich somit aus *Geradenstücken* der Länge πa zusammensetzen.
Der Schwerpunkt eines realen Zwei-Scheiben-Rollers dieser Bauart würde natürlich auf Grund seiner Trägheit eine gerade Linie durchlaufen. Mathematisch wäre auch eine Kurve aus senkrecht zueiander gesetzten Geradenstücken der Länge πa denkbar.

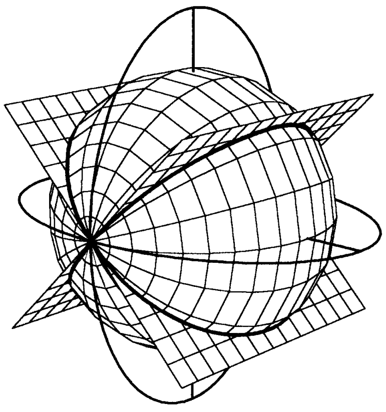

Abb.9: Für den Grenzfall c = 0, d.h. die Ellipsenmittelpunkte fallen zusammen, entartet die Tennisballkurve in zwei zueinander senkrechte Großkreise der Berührkugel.

4 Ausblick

Weitere Überlegungen zu diesem Problem führen zu noch anderen Klassen von Zwei-Scheiben-Rollern.

So läßt sich das Problem zum Beispiel auch für längs einer der Halbachsen geschnittenen *Halbellipsen* lösen. Die Bedingung für den Zentralabstand ähnelt der in (11) gefundenen Formel und lautet:

(18) $$c^2 = 2a^2 - 2b^2 \quad \text{mit} \quad a \geq b$$

Betrachtet man hier noch die Möglichkeit $c < 0$, findet man weitere Objekte.

Hier wollen wir noch ein einfaches Beispiel zeigen, das sich aus dieser Überlegung für a = b = r ergibt. Man hat dann zwei Kreishälften; der Abstand c ergibt sich zu c = 0, d.h. die Kreishälften müssen an ihren Mittelpunkten senkrecht zueinander verbunden werden. Wiederum mit Bierdeckeln ist eine Realisierung möglich (Abb.10). Bei diesem Zwei-Scheiben-Roller (18) ist die Bahn des Schwerpunkts auch einfacher zu berechnen. Sie setzt sich aus Kreisbogenteilen zusammen.

Abb.10: Mit Hälften von kreisförmigen Bierdeckeln läßt sich ein Sonderfall eines Zwei-Scheiben-Rollers realisieren.
In der abgebildeten Form halten sich die Kreishälften nicht besonders stabil beim Abrollen. Es ist jedoch ohne Beeinträchtigung der Rollfunktion möglich, in der Mitte zusätzliche Halterungen anzubringen.

Mit den angegebenen Möglichkeiten lassen sich schon ganze Mengen von Zwei-Scheiben-Rollern denken und - was sehr attraktiv, anschaulich und ästhetisch sein kann - auch bauen. Der Bau ist übrigens ziemlich unkritisch. Selbst wenn der errechnete Abstand c nicht genau eingehalten wird, bewegen sich die Zwei-Scheiben-Roller noch sehr gut, da sich die Schwerpunkthöhe in Abhängigkeit vom Abstand c nur wenig ändert.

Ein allgemeines Prinzip zur mathematischen Konstruktion aller möglichen Zwei-Scheiben-Roller mit ebener Schwerpunktbahn kann so formuliert werden:
Man ziehe auf einer Kugel Σ eine beliebige, geschlossene Kurve l . Nun bestimme man die der Kugel Σ längs l umschriebene Torse als Einhüllende der in den Punkten von l berührenden Tangentialebenen. Anschließend schneide man die Torse mit zwei *Ebenen* e_1 und e_2 bzw. noch allgemeiner mit zwei Schnittflächen, die als Scheibenränder dienen sollen. Vorausgesetzt, daß die die Abrollebene berührenden Scheibenränder *konvex* sind, wird der *Mittelpunkt* der Kugel Σ beim Abwälzen des so ermittelten Zwei-Scheiben-Rollers auf einer Ebene eine *ebene* Bahn durchlaufen. Der Kugelmittelpunkt wird allerdings nur bei geeigneter Abstimmung der Massenbelegung der Schnittflächen bzw. Schnittränder den Schwerpunkt darstellen.

So mag die Menge aller aus *verschiedenen* wie *kongruenten* Scheiben bestehenden Zwei-Scheiben-Rollern, deren Schwerpunkt beim Abrollen auf einer Ebene von dieser immer den gleichen Abstand beibehält, unerschöpflich sein. Wohl aber ist nur eine begrenzte Anzahl dieser mathematisch, physikalisch interessanten wie künstlerisch ästhetischen Objekte mathematisch geschlossen darstellbar.

Literatur:

[1] Stewart, A.T.: Two-Circle-Roller, American Journal of Physics **34** (1966), 166-167
[2] Flowerday, F., Singmaster, D.: The Wobbler, Eureka (University of Cambridge) **50** (1990), 74-78

Danksagung: Wir sind Prof. Dr. W. Wunderlich/TU Wien und Prof. Dr. R. Koch/TU München für mathematische Hilfestellung bei den vorgeführten Betrachtungen zu Dank verpflichtet.