

## Hinunter und wieder hinauf – Maxwellsche Räder

Christian Ucke und Hans Joachim Schlichting

*Sisyphus musste bekanntlich einen Stein mühsam bergauf bewegen, der dann immer wieder hinunter rollte. Das bekannte Maxwellsche Rad macht vielen Physikstudenten ähnliche Mühe. Es gibt jedoch kreative und unterhaltsame Variationen dieses Klassikers.*

Das Maxwellsche Rad ist als klassischer Versuch zur Demonstration der mechanischen Energieerhaltung Physikstudenten und Schülern aus Praktika und Vorführungen weithin vertraut – beileibe nicht immer Freude und Anregung stiftend. Nach unseren Recherchen hat es nicht der berühmte Physiker James Clerk Maxwell selbst entwickelt, es ist aber vermutlich nach ihm benannt. Ein Maxwellsches Rad ist mit seiner horizontalen Achse vom Radius  $r$  an zwei vertikalen Fäden so aufgehängt, dass diese sich bei Drehung des Rads um die Achse auf- oder abwickeln.

Bringt man das Rad durch Aufwickeln der Fäden in die höchste Lage (maximale potenzielle Energie) und lässt es dort los, so bewegt es sich unter dem Einfluss der Schwerkraft immer schneller rotierend mit konstanter Beschleunigung nach unten. Unten angekommen (maximale Rotationsenergie), dreht es sich aus Trägheit weiter, die Fäden wickeln sich unter Umkehrung des „Wicklungssinns“ auf und es bewegt sich dabei wieder nach oben. Dabei erreicht es nicht mehr die Ausgangshöhe, d.h. es ist mechanische Energie verloren gegangen. Die Bewegung kommt deswegen meist nach etwa dreißig bis fünfzig Ab- und Aufwärtsbewegungen zur Ruhe. Bei dem Modell aus Abbildung 1 vermindert sich bei einer Ab- und Aufwärtsbewegung die mechanische Energie um etwa 8%.

Beim unteren Umkehrpunkt dreht sich unter Beibehaltung der Rotationsrichtung des Rads die Bewegungsrichtung in einer sehr kurzen Zeitspanne um. Das verursacht einen Ruck nach unten, d.h. die Spannung des Aufhängfadens wird plötzlich vergrößert. Er kann deswegen sogar reißen.

In der bekannten Form als schweres Metallrad ist es mittlerweile auch als Designobjekt bzw. office toy günstig erhältlich (Abbildung 1).



*Abb.1: Maxwellsches Fallrad als Designobjekt; Gesamthöhe 32cm. Rechts befindet sich das Rad in aufgewickeltem Zustand in fast maximaler Höhe.*

Statt des physikalisch-technisch optimierten Rads sind auch andere Drehkörper denkbar. In Abbildung 2 ist beispielweise ein ästhetisch ansprechender Papagei dargestellt. Das lädt auch zu kreativen Eigenkonstruktionen ein. Ein gewisses Problem besteht bei solchen unsymmetrischen Figuren darin, den Schwerpunkt exakt mittig in die Drehachse zu positionieren. Außerdem darf die Achse des mittleren Trägheitsmoments der Figur nicht mit der Drehachse zusammen fallen, da in diesem Fall die Drehung instabil wird.



Abb.2: Ein Papagei als Maxwellsches Rad (Bild J. Becker).

Eine ganz andere Herangehensweise an die Auf- und Abbewegung eines Rads kommt in dem vor mehreren Jahren erhältlichen Sisyphos-Rad zum Ausdruck. Der Name spricht für sich. Durch einen Plastikdrehkörper läuft zentral eine dünne, magnetisierbare, verchromte Achse hindurch, auf der in der Mitte innerhalb der Plastikschale ein starker Magnet sitzt. Zwei verchromte Eisenstangen mit einer Länge von etwa 55cm sind so auf einer Plattform befestigt, dass der Abstand unten etwas größer ist als die Länge der Drehachse. Nach oben hin nimmt der Abstand der Stangen leicht ab. Setzt man das Drehrad oben an der einen oder anderen Seite der Stangen symmetrisch an, rotiert es langsam beginnend und dann immer schneller werdend an den Stangen hinunter. Je nachdem auf welcher Seite der Stangen das Drehrad angesetzt wird, ergibt sich eine Links- oder Rechtsdrehung des Rads. Die infolge der Magnetisierung bedingte Anziehung der Achse durch die Stangen sorgt dafür, dass es auch ohne Aufwicklung eines Fadens um die Achse zu keiner Fallbewegung kommt, sondern eine Drehung resultiert. Wird beim Herabrollen des Drehrads der Abstand der Stangen schließlich größer als die Länge der Drehachse, läuft das Rad zwischen den Stangen durch und gelangt auf die andere Seite. Unter Beibehaltung des Rotationssinnes bleibt dem nunmehr mit maximaler Drehgeschwindigkeit rotierenden Rad nichts anderes übrig, als auf dieser Seite anzusteigen (siehe Video SisyphosRad1.wmv im Zusatzmaterial). Dieser Richtungswechsel entspricht im Prinzip genau dem an den Fäden des klassischen MaxwellRads bewirkten Übergang von der Abwicklung zur Aufwicklung. Auch der Impuls nach unten bei dem Umkehrvorgang ist entsprechend vorhanden. Ein Unterschied besteht darin, dass die Reibung der magnetisierten Achse des Drehkörpers an den Stangen von der Stärke der Magnetisierung abhängen kann. Im vorhandenen Modell wurde die Magnetisierung mit der Masse des Drehkörpers so abgestimmt, dass der Drehkörper bei dem unteren Umkehrvorgang gerade nicht herunterfällt.



Abb.3: Das Sisyphos-Rad mit magnetischer Achse.

Ein Nachteil ist die bei diesem Modell vorhandene Achse mit konstantem Durchmesser. Setzt man den Drehkörper nicht ganz symmetrisch zu den Stangen an, läuft er schief hinunter, kann dabei mit dem Plastikteil die Stangen selbst berühren und sogar zum Stillstand kommen (siehe Video *SisyphosRad1.wmv* im Zusatzmaterial).

Bei der in Abbildung 4 gezeigten Konstruktion ist die Achse des Drehkörpers ebenfalls magnetisiert, allerdings sind die Achsenden hier konisch ausgebildet. Die Stangen sind wie im vorigen Fall leicht winkelig angeordnet; ihr Abstand ist unten etwas größer als die Länge der Drehachse.

Der Vorteil dieser Konstruktion besteht darin, dass sich der Drehkörper beim Hinunterrollen durch einen interessanten Regelvorgang von selbst stabilisiert (siehe Video *SisyphosRad2.wmv* im Zusatzmaterial). Befindet sich nämlich der Drehkörper nicht genau in der Mitte zwischen den Stangen, dreht sich das Rad an einer Stange auf einem größeren Radius der Achse als auf der anderen Seite. Dann läuft die Achse an der Stange wegen des größeren Radius aber schneller hinunter (oder hinauf) und damit wieder zur Mitte zwischen den Stangen. Eine ähnliche, konische Konstruktion weisen übrigens Eisenbahnräder auf, die sich dadurch auf den – in dem Fall natürlich parallel laufenden – Schienen immer mittig stabilisieren.

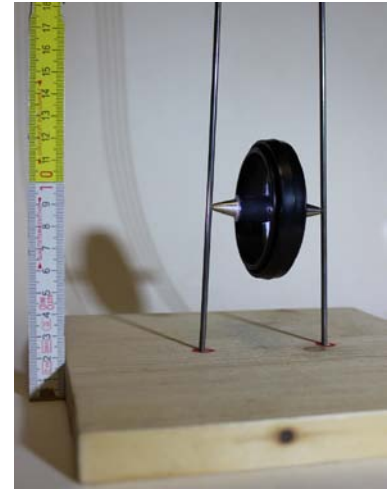


Abb.4: Ein Sisyphos-Rad mit konischen Achsenden.

Eine weitere Besonderheit ist, dass der Drehkörper schnell startet, da zu Beginn der Durchmesser der Achse groß ist. Beim Hinunterrollen wird der Radius kleiner. Die Abwärtsbeschleunigung des Schwerpunkts des Drehkörpers nimmt deswegen hier im Vergleich zu einer Achse mit konstantem Durchmesser beim Hinunterrollen ab (siehe Infokasten).

Ein unmittelbarer quantitativer Vergleich mit dem klassischen Maxwell Rad ist deswegen schwierig, weil die Drehachse keinen konstanten Durchmesser und die Stangen einen Winkel aufweisen.

Alle bisher beschriebenen Variationen haben den Nachteil, dass die Auf- und Abbewegung nach einiger Zeit aufgrund von Reibungsverlusten zu Ende geht. Schon lange gibt es ein Spielzeug namens Zauberrad (gegebenenfalls andere Namen; Englisch rail twirler), bei dem das durch menschliche Kraft ausgeglichen wird. Auf verchromten Eisenstangen befindet sich ein Drehkörper mit einer magnetischen Achse, deren Enden häufig auch konisch ausgebildet sind (Abbildung 5). Durch geschicktes Bewegen des Spielzeugs kann man die Luste kompensieren und ein längeres Auf und Ab oder Hin und Her des Drehkörpers erzielen. Fortgeschrittene Modelle gehen über kleine Lichtquellen im Drehkörper, die eine



Abb.5: Ein sogenanntes Zauberrad ist eine spielerische Variation des Maxwell Rads. Hier kann man die Bewegungsumkehr aufgrund der Verbreiterung des Stangenabstands sehr gut beobachten.

che visuelle Attraktion erzeugen.

Jo-jo's ähneln einem Maxwell'schen Rad. Bei ihnen wird durch menschliche Aktivität eine andauernde Auf- und Abbewegung eines Drehkörpers bewirkt. Das ist jedoch ein eigenes Thema.

### **Zusammenfassung**

Das Maxwellsche Rad ist als ein klassisches Experiment zur Erhaltung der mechanischen Energie bekannt. Statt dieses technisch optimierten zylinderförmigen Rads mit großem Trägheitsmoment kann man beispielsweise auch Tierfiguren als Drehkörper nehmen. Darüber hinaus kann man das Rad mit einer magnetischen Achse an senkrecht aufgebauten Eisenstangen hinunter und hinauf laufen lassen. Eine konische Form der Achsenden erbringt zusätzlich eine Selbststabilisierung des Drehrads zwischen den Achsen.

### **Stichwörter**

Maxwellsches Rad, Fallrad, Maxwellsche Scheibe, Zauberrad, magnetisches Lichttrad, Kreisel, Maxwell wheel, Maxwell disk, rail twirler, magnetic gyro-fly wheel

### **Die Autoren**

Christian Ucke und Hans-Joachim Schlichting sind die Begründer der Kolumne Spielwiese.

#### *Anschriften:*

*Dr. Christian Ucke, Rofanstr. 14B, 81825 München*

*e-mail: [ucke@mytum.de](mailto:ucke@mytum.de)*

*Prof. Dr. Hans Joachim Schlichting, Didaktik der Physik, Universität Münster, 48149 Münster*

*e-mail: [schlichting@uni-muenster.de](mailto:schlichting@uni-muenster.de)*

## Infokasten Theorie

Am prinzipiellen Aufbau eines Maxwell'schen Rads, bestehend aus einer dünnen Achse, einem zylindrischen Rotationskörper und aufgehängt an einem dünnen Faden lassen sich einige quantitative Zusammenhänge verdeutlichen. In der Abbildung 6 ist aus Gründen der Übersichtlichkeit der Durchmesser der Achse sehr groß dargestellt. Ist der Achsdurchmesser klein gegen den Durchmesser des eigentlichen Rads ( $r \ll R$ ), befindet sich der Schwerpunkt S hinreichend genau senkrecht unter dem Aufhängepunkt.

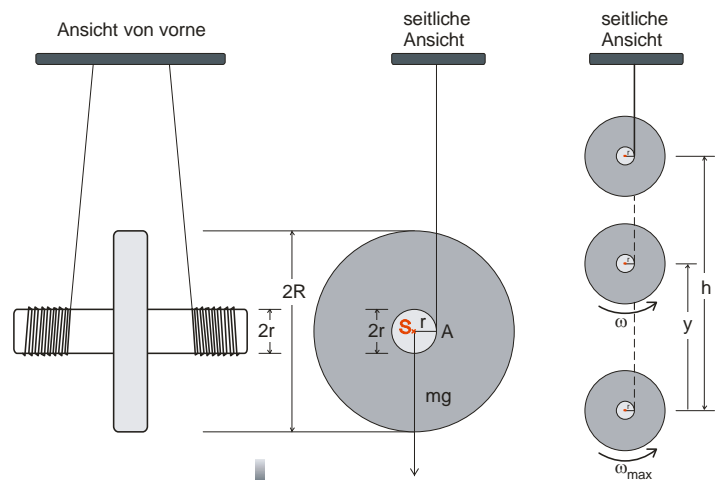


Abb.6: Benennungen beim Maxwell'schen Rad.

Die Gesamtenergie eines Maxwell'schen Rads setzt sich aus potenzieller und kinetischer Energie zusammen. Energieverluste aller Art werden im Folgenden vernachlässigt. Wird der Nullpunkt der potenziellen Energie auf den Koordinatenursprungspunkt beim unteren Umkehrpunkt bezogen, hat das Rad beim oberen Startpunkt die potenzielle Energie  $U = mgh$ . Beim Abrollen addiert sich zur momentanen, potenziellen Energie  $U = mgy$  die translatorische kinetische Energie  $E_k = \frac{1}{2}mv^2$  und die Rotationsenergie des Rads  $E_r = \frac{1}{2}I_A\omega^2$

$$(1) \quad E = mgy + \frac{mv^2}{2} + \frac{I_A\omega^2}{2} = mgh$$

$m = \text{Gesamtmasse}$ ;  $v = \text{Geschwindigkeit}$ ;  $I_A = \text{Trägheitsmoment bezüglich Angriffspunkt A}$ ,  $\omega = \text{Winkelgeschwindigkeit}$ ;  $g = 10\text{m/s}^2$

Mit der Beziehung  $v = \omega r$  ergibt sich aus Formel (1) nach einigen Umformungen für die Geschwindigkeit  $v$  des abwärts rollenden Rads

$$(2) \quad v = \sqrt{\frac{2g(h-y)}{1 + \frac{I_A}{mr^2}}} = \sqrt{2\frac{g}{k}(h-y)} = \sqrt{2a(h-y)} \quad \text{mit} \quad k = 1 + \frac{I_A}{mr^2}$$

Die Beschleunigung des Rads  $a = g/k$  ist folglich kleiner als die Erdbeschleunigung  $g$ , da  $k > 1$ .

Mit der anfänglichen Annahme  $r \ll R$  gilt auch  $I_A \approx I$ , wobei  $I$  das Trägheitsmoment des Zylinders bezüglich der Drehachse durch den Schwerpunkt S sein soll:  $I = \frac{1}{2} \cdot m \cdot R^2$ . Damit ergibt sich

$$(3) \quad a = \frac{g}{k} = \frac{g}{1 + \frac{R^2}{2r^2}} \approx g \frac{2r^2}{R^2}$$

Die Beschleunigung ist also konstant beim Hinunterrollen, unabhängig von der Masse bzw. dem Trägheitsmoment des Rads und umso kleiner, je mehr sich Radius von Drehachse und Zylinder unterscheiden. Sehr empfindlich ist sie abhängig vom Radius der Drehachse. Hier muss gegebenenfalls die Dicke des Aufhängefadens berücksichtigt werden [2].

Das in Abbildung 1 gezeigte Rad hat eine Masse von  $m = 310g$ ; der Durchmesser der Achse beträgt  $7mm$ , der Durchmesser des zylinderförmigen Rads  $60mm$ . Damit ergibt sich etwa  $a = 0,27m/s^2$ , d.h. erheblich weniger als die Erdbeschleunigung  $g$ . Bei Berücksichtigung einer Fadendicke von  $0,9mm$  ergibt sich  $a = 0,35m/s^2$ . Bei einer Höhendifferenz von  $h = 21cm$  beträgt die Geschwindigkeit beim unteren Umkehrpunkt etwa  $v = 33cm/s$ . Diese berechneten Werte konnten durch eine Videoanalyse (Viana; [www.viananet.de](http://www.viananet.de)) im Rahmen der Messunsicherheit bestätigt werden (siehe Zusatzmaterial).

Kommt das Maxwell'sche Rad zum unteren Umkehrpunkt, bewegt sich der Schwerpunkt in einer kurzen Zeit  $\Delta t$  auf einem Halbkreis um den Befestigungspunkt des Aufhängefadens an der Achse (gestrichelte rote Linie in Abbildung 7). Die Schwerpunktgeschwindigkeit  $v$  verändert ihre Richtung um  $180^\circ (= \pi)$ , d.h. es gibt eine Impulsänderung der Größe  $2mv$ . Das verursacht eine zusätzliche, kurzzeitig wirkende Kraft auf den Faden, die sich in Form eines Rucks bemerkbar macht

$$(4) \quad F = \frac{2mv}{\Delta t} = \frac{2mv \cdot \omega}{\pi} = \frac{2mv^2}{\pi \cdot r} \quad \text{mit} \quad \Delta t = \frac{\pi}{\omega}$$

bzw. mit dem Ergebnis aus Formel (2) und da hier außerdem  $x = 0, r \ll R$

$$(5) \quad F = \frac{2m}{\pi \cdot r} \cdot \frac{2gh}{\left(1 + \frac{I_A}{mr^2}\right)} \approx \frac{4mgh \cdot mr^2}{\pi \cdot r \cdot (mr^2 + 0,5mR^2)} \approx \frac{8mghr}{\pi R^2}$$

Diese zusätzliche Kraft ist umso kleiner, je kleiner der Radius der Drehachse ist, allerdings auch umso größer, je länger die Strecke zum Hinunterlaufen ist.

Für das in Abbildung 1 gezeigte Rad ergibt sich bei einer Höhendifferenz von  $h = 21cm$  etwa eine Kraft von  $F = 6N$ . Verglichen mit dem Gewicht des Rads von  $3,1N$  bedeutet das insgesamt etwa eine Verdreifachung der Fadenspannung durch den Ruck. Das kann bei zu dünnen Fäden zum Abreißen führen.

## Literatur

- [1] Groth, J. et al: Energiebetrachtungen zum Maxwell'schen Rad, *Mathematisch-Naturwissenschaftlicher Unterricht* **37** (1984), 142-150  
 [2] Pecori, B. et al: The Maxwell Wheel investigated with MBL, *The Physics Teacher* **36** (1998), 362-366

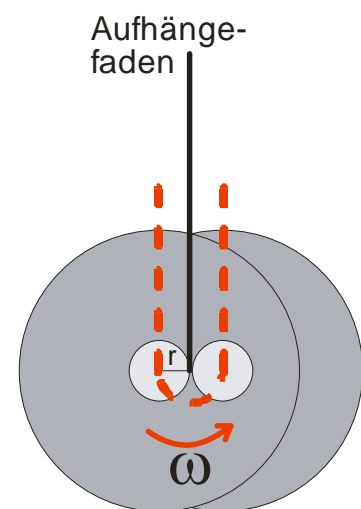


Abb.7: Umkehrpunkt beim Maxwell'schen Rad.

## Zusatzmaterial

Das Drehrad aus Abbildung 1 hat die aus Abbildung 1z ersichtlichen Abmessungen. Damit errechnen sich folgende Werte:

Trägheitsmoment bezüglich der Drehachse durch den Schwerpunkt

$$I = 1397 \text{ gcm}^2$$

Trägheitsmoment bezüglich der Drehachse durch den Rand der Drehachse

$$I_A = 1435 \text{ gcm}^2$$

Die Trägheitsmomente bezüglich Schwerpunkt und Aufhängepunkt unterscheiden sich um 2,7%, d.h. tatsächlich nur sehr wenig.

Das Trägheitsmoment wird teilweise bei den vereinfachten Formeln gar nicht benötigt. Man kann damit jedoch die Größenordnung der Vereinfachungen berechnen.

Die Beschleunigung gemäß Formel (3) ergibt sich zu  $a = 0,27 \text{ m/s}^2$ .

Die Fadendicke beträgt  $0,9 \text{ mm}$ . Rechnet man die Hälfte davon zum Radius der Drehachse dazu, ergibt sich gemäß Formel (3) eine Beschleunigung von  $a = 0,35 \text{ m/s}^2$ .

Aus dem Video (Video Maxwellrad.avi) wurde mit Hilfe des frei zugänglichen Auswerteprogrammes Viana ([www.viananet.de](http://www.viananet.de)) folgendes Diagramm ermittelt:

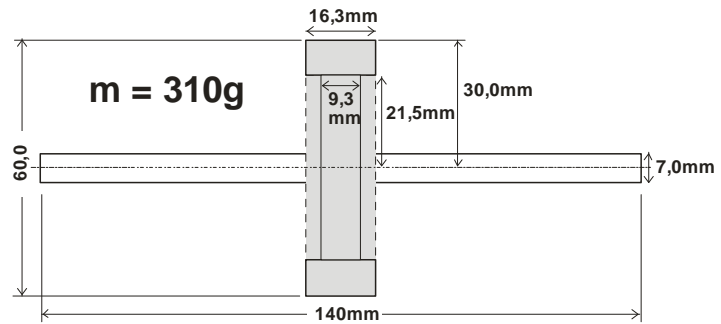
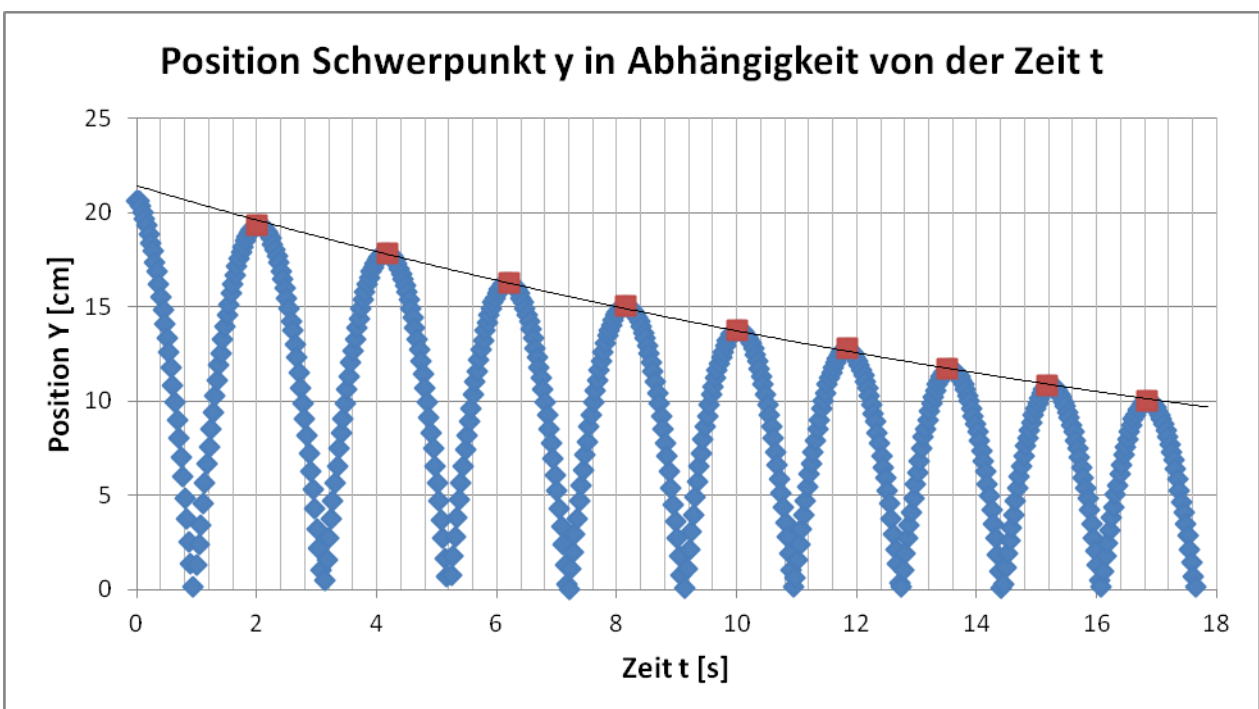


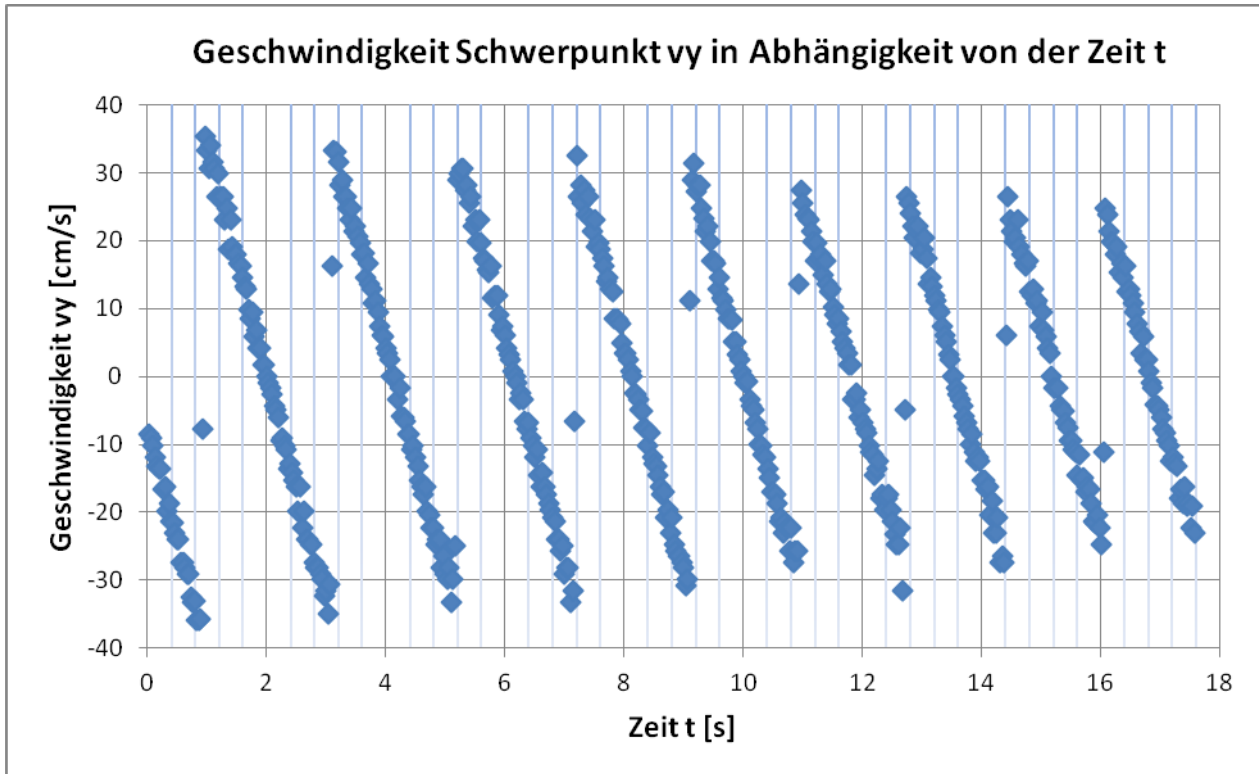
Abb.1z: Abmessungen des Maxwellschen Rads.



Hieraus lässt sich die Abnahme der mechanischen Energie nach jeder Schwingung zu 8% ermitteln. Die Maxima der Kurve (rote Punkte) nehmen entsprechend einer Exponentialfunktion ab:

$$A(t) = 21,4 \cdot e^{-0,045t} \quad R^2 = 0,9985$$

Differenziert man die Kurven der Abbildung der Position des Schwerpunkts nach der Zeit, erhält man folgendes Diagramm:



Aus dieser Grafik lässt sich entnehmen, dass die Maximalgeschwindigkeit des Schwerpunkts bei einer Fallhöhe von 21cm etwa 37cm/s beträgt. Die Rechnung mit Formel (2) ergibt 33,3 cm/s.

Die scheinbar isolierten Punkte zwischen den Geraden sind keine Messfehler, sondern stellen Messpunkte zwischen der Abwärts- und Aufwärtsbewegung im unteren Umkehrpunkt dar.

Die Geraden sind alle parallel zueinander. Das bedeutet, die Beschleunigung bei der Ab- und Aufwärtsbewegung ist immer gleich groß.

Die Beschleunigung selbst folgt aus der Steigung der Geraden und ergibt sich zu  $a = 0,336\text{m/s}^2$  (aus Regressionsgerade). Das stimmt befriedigend mit dem berechneten Wert von  $a = 0,35\text{m/s}^2$  überein.

Das Video wurde mit 30 Bildern/Sekunde aufgenommen. Das kann heutzutage fast jede Digitalkamera. Man erkennt, dass das Drehrad nicht nur hinunter und wieder hinauf rollt, sondern dass zusätzliche Schwingungen des gesamten Drehrads auftreten. Diese Schwingungen sind bei diesem einfachen Modell kaum zu vermeiden, da das manuelle Starten des Drehrads aus der oberen Position praktisch nicht ohne Störeffekte machbar ist. Außerdem entsteht bei dem unteren Umkehrpunkt eine prinzipiell nicht vermeidbare Schaukelbewegung. Unter diesen Umständen erscheinen die Werte der quantitativen Auswertung und der Vergleich mit den Berechnungen ganz befriedigend. Es zeigt sich, dass das einfache Maxwellrad mit allgemein zugänglichen Hilfsmitteln interessante Experimentalphysik ermöglicht.