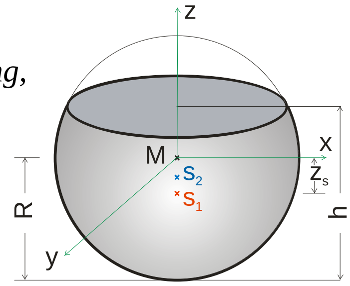
Einige Überlegungen zum Balance Becher

1) *Besteht der Becher aus massivem Edelstahl?*
nein: Masse Becher = 153g (offenbar gibt es verschiedene Versionen: auch 162g wurde gemessen);
Volumen, das der Messbecher verdrängt = $75 cm^{3.}$
Daraus folgt Dichte $\rho \approx 2gcm^{-3}$. Edelstahl hat aber 7,9 bis $8{,}0gcm^{-3}$

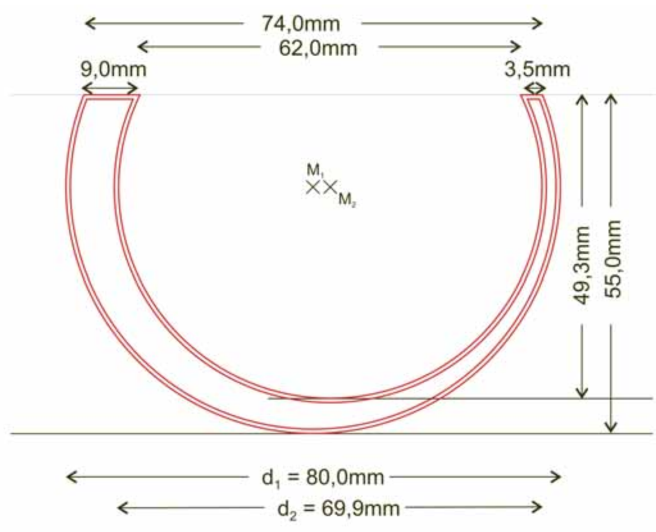
Zusatzfrage: Wo läge der Schwerpunkt, falls der Becher tatsächlich massiv wäre? Wohin würde er sich dann neigen und wie stark?
Die Beantwortung ist komplexer! (siehe Berechnungen unter Punkt 5))



2) *Wie groß ist die Dicke des Edelstahlblechs unter der Voraussetzung, dass überall gleichdickes Blech verwendet wurde und dass es sich um kugelförmige Teile handelt?*

Oberfläche einer Kugelkalotte der Höhe h: $O = 2Rh\pi$

Die Abmessungen wurden mit einem Messschieber ermittelt und sind aus der Abbildung ersichtlich.
Der innere Kreis wurde zeichnerisch mit dem Vektorzeichenprogramm CorelDraw durch den unteren, inneren Pol und die beiden oberen, inneren Randpunkte ermittelt. Gewisse Mathe-Programme könne so etwas auch. Eine Berechnung "zu Fuß" mit diesen drei Punkten ist mühsamer.



Für die Oberfläche der äußeren Schale ergibt sich (eine angenommene Blechdicke von 0,7mm berücksichtigt):

$O_1 = 2 \cdot 3{,}93 \cdot 5{,}43 \cdot \pi = 134{,}1cm^2$

Oberfläche der inneren Schale:

$O_1 = 2 \cdot 3{,}57 \cdot 4{,}93 \cdot \pi = 110{,}6cm^2$

Der oben befindliche, exzentrische Kreisring hat die Fläche

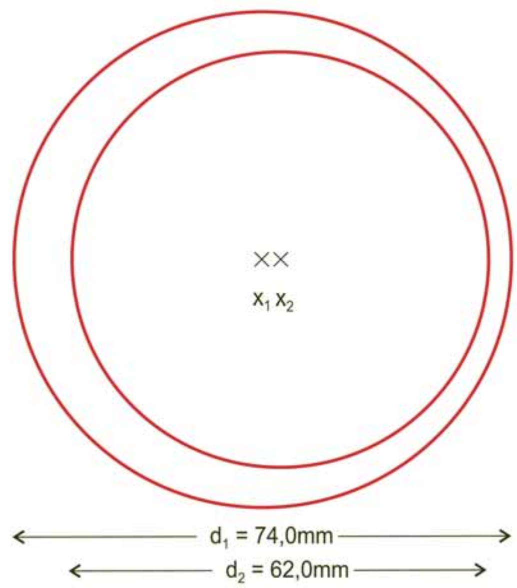
$O_3 = \pi \cdot (3{,}7^2cm^2 - 3{,}1^2cm^2) = 12{,}8cm^2$

Die Summe der drei Teilflächen ist

$O = 257{,}5cm^2$

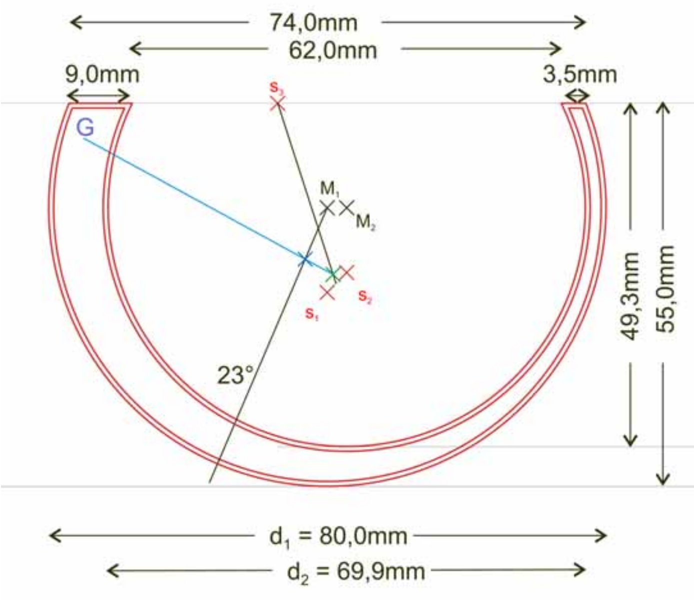
Aus $257{,}5cm^2 \cdot d \cdot 7{,}9gcm^{-3} = 153g$
ergibt sich die Blechdicke d unter der Voraussetzung überall gleicher Dicke zu

$d = 0{,}075cm$



3) *Wo liegt der Gesamtschwerpunkt des – leeren - Bechers unter der Voraussetzung, dass überall gleichdickes Blech verwendet wurde?*
Kann der Schwerpunkt dort liegen, wo er ermittelt wurde?

Schwerpunkt dünnwandige Kugelkalotte



$z_s = -(R – h/2)$

Beispielhafte Rechnung für den Schwerpunkt s_1 der äußeren Kugelkalotte

$s_1 = -(39{,}3-54{,}3/2) = -12{,}15$mm
d.h. s_1 liegt 12,15mm unterhalb von M_1

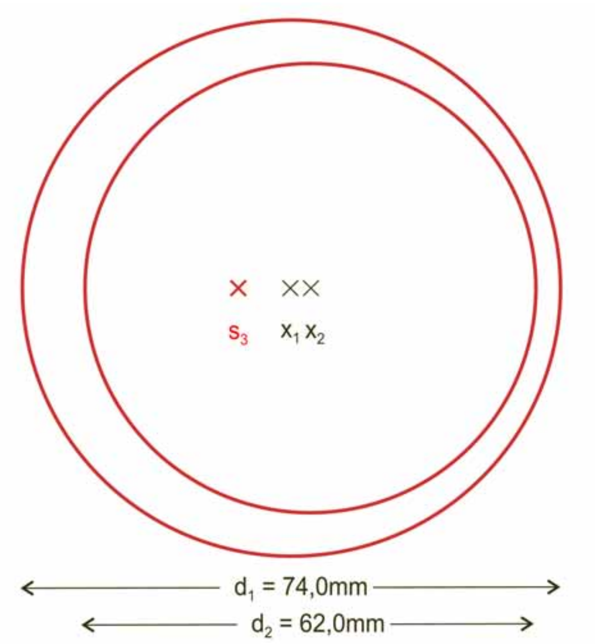
dito

$s_2 = -(34{,}3-50{,}0/2) = -9{,}3$mm unterhalb von M_2

Der Schwerpunkt s_3 des exzentrischen Kreisrings errechnet sich aus

$s_3 = -(x_1m_1 - x_2m_2)/(m_1 - m_2)$
$= -t/((d_1/d_2)^2-1) = -3/((74/62)^2-1) = -7{,}1$mm

wobei $t = x_1 – x_2 = 3$mm und $x_1 = 0$ gesetzt.
und $m_1 = \pi r_1^2 d\rho$ dito m_2

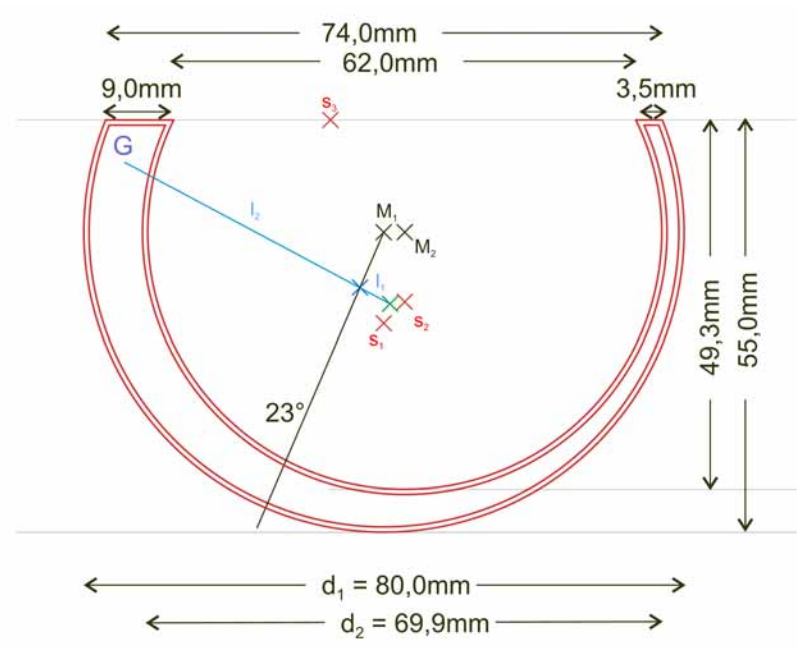


Diese drei Schwerpunkte sind in der oberen Zeichnung eingetragen. Aus s_1 und s_2 errechnet sich ein Schwerpunkt zwischen den Beiden (entsprechend den Massen, die wiederum äquivalent zu den Flächen sind und unter der Voraussetzung, dass die Blechdicke überall gleich ist). Aus diesem Schwerpunkt und s_3 errechnet sich der Gesamtschwerpunkt (mit grünem Kreuz markiert)

Dieser Schwerpunkt müsste aber auf der von M_1 ausgehenden 23°Linie liegen, da nur dann der leere Becher unter 23° schräg steht.

Daraus ergibt sich, dass entweder die Voraussetzung (überall gleiche Blechdicke) nicht stimmt, dass ein Zusatzgewicht G z.B. links oben eingebaut ist, dass der ganze Hohlraum mit einer Flüssigkeit, Sand o.ä. gefüllt ist oder noch andere Ungleichmäßigkeiten vorhanden sind (z.B. exzentrischer Kreisring mit erheblich größerer Blechdicke).

4) *Wie kann man das zusätzliche Gewicht an dem dicken Rand des Bechers ermitteln? (Zerstören des Bechers erlaubt/nicht erlaubt?)*



Annahme: eine Zusatzmasse G ist links oben unter dem dicken Rand angebracht.

Da die Gesamtmasse des Bechers feststeht, muss die Blechdicke geringer werden. G muss so groß sein, dass es den Gesamtschwerpunkt auf die von M_1 ausgehende Linie zieht (blaues Kreuz).

Es muss einerseits gelten; d' ist die unbekannte Blechdicke

(1) $G + 257{,}5\text{cm}^2 \cdot 7{,}9\text{gcm}^{-3} \cdot d' = 153\text{g}$

Andererseits muss das Verhältnis l_1/l_2 gerade dem Verhältnis der Masse G zur der mit der unbekannten Dicke d' berechneten Gesamtmasse entsprechen (Hebelgesetz; Schwerpunktermittlung)

(2) $l_1/l_2 = G/(257{,}5\text{cm}^2 \cdot 7{,}9\text{gcm}^{-3} \cdot d')$

Aus der Zeichnung ergibt sich das Verhältnis zu $l_1/l_2 = 3/23{,}5 = 0{,}13$

Aus Gl. (1) und (2) folgt $d' \approx 0{,}067\text{cm} = 0{,}67\text{mm}$ und $G \approx 18$ g.

Die Blechdicke nimmt also etwas ab (von 0,75mm auf 0,67mm). Das Zusatzgewicht verlagert den Schwerpunkt in die richtige Richtung.

Da hier einige Unsicherheiten eingehen, wird die Genauigkeit dieser Rechnungen bezüglich des Zusatzgewichtes auf vielleicht 10% Prozent eingeschätzt.

Ein Auseinandersägen eines Balance Bechers hat die Richtigkeit der Annahme einer Zusatzmasse gezeigt. Eine grobe Abschätzung dieser Zusatzmasse aus Edelstahl ($\rho \approx 8\text{gcm}^{-3}$) aus dem zersägten Becher ergibt etwa 20g *(Teil 1: 2,5mm x26mm x25mm, Teil 2: 2,5mm x14,5mm x25mm)*
Passable Übereinstimmung mit obiger Rechnung.
Die Zusatzgewichte scheinen festgeschweißt zu sein. Sie lassen sich nicht ohne Gewalt herausziehen!
Die Blechdicke beim auseinander gesägten Exemplar schwankt um einen Wert von 0,70mm.
Es wäre interessant zu erfahren, wie der Becher technisch konkret hergestellt wird. Bleibt die Blechdicke bei dem verwendeten Verfahren (Tiefziehen?) überall konstant?

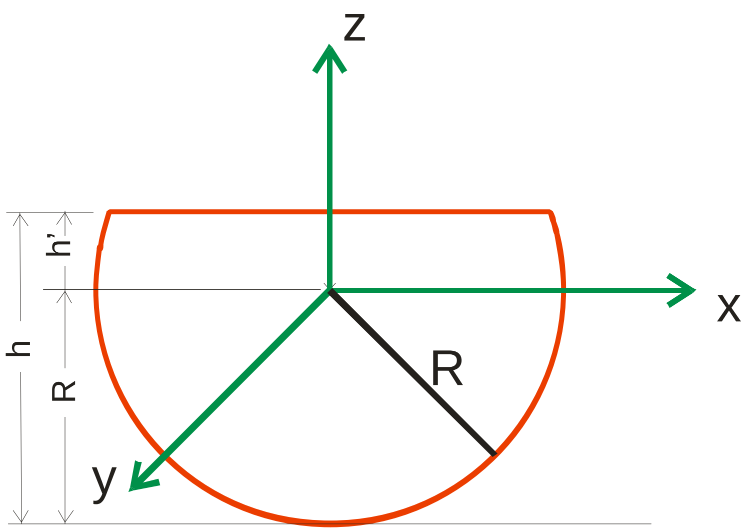
5) *Berechnung des Volumens und Schwerpunkts eines Kugelsegments (=gefüllte Kugelkalotte)*

Volumen und Schwerpunkt Kugelsegment

(= Kugelabschnitt = gefüllte Kugelkalotte = Kugelkappe?)

Die hier abgeleitete Formel ist nicht ohne weiteres im Internet oder in Formelsammlungen zu finden.

Schnitt von der Seite



Der z-Wert läuft von –R bis h', die horizontalen Schnitte haben einen von z abhängigen Radius nämlich $\sqrt{R^2 - z^2}$, da es sich um Vollkreise handelt läuft φ von Null bis 2π. Also hat der Kugelabschnitt in Zylinderkoordinaten folgende Darstellung

Kugel: $-R \le z \le h', \quad 0 \le r \le \sqrt{R^2 - z^2}, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi$

Segmentvolumen $V_s = \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{-R}^{h'} \int\limits_0^{\sqrt{R^2-z^2}} r\,dr\,dz\,d\varphi$

$$V_s = \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{-R}^{h'} \frac{1}{2}(R^2 - z^2)\,dz\,d\varphi$$

$$V_s = \int\limits_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2}(R^2 h' - \frac{h'^3}{3} + R^3 - \frac{R^3}{3}) \right] d\varphi$$

$$V_s = \left[\frac{1}{2}(\frac{2R^3}{3} + R^2 h - \frac{h^3}{3}) \right] 2\pi$$

$$V_s = \left[\frac{2}{3}R^3 + R^2 h' - \frac{h'^3}{3} \right] \pi$$

Mit h' = h – R folgt $V_s = \frac{h^2 \pi}{3}[3R - h]$

Schwerpunkt $$z_s = \frac{\int z\, dV}{V_s}$$

$$z_s = \frac{\int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{-R}^{h'} \int\limits_0^{\sqrt{R^2-z^2}} r\, z\, dr\, dz\, d\varphi}{V_s}$$

$$z_s = \frac{\int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{-R}^{h'} \frac{1}{2}(R^2 - z^2)\, z\;\, dz\, d\varphi}{V_s} = \frac{\int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{2}\left(\frac{R^2 z^2}{2} - \frac{z^4}{4}\right)\Big|_{-R}^{h'} d\varphi}{V_s}$$

$$z_s = \frac{\int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{2}\left[\frac{R^2 h'^2}{2} - \frac{h'^4}{4} - \frac{R^4}{2} + \frac{R^4}{4}\right] d\varphi}{V_s}$$

$$z_s = \frac{\frac{1}{2}\left[\frac{R^2 h'^2}{2} - \frac{h'^4}{4} - \frac{R^4}{4}\right] 2\pi}{V_s}$$

$$z_s = \frac{\left[\frac{R^2 h'^2}{2} - \frac{h'^4}{4} - \frac{R^4}{4}\right]}{\left[\frac{2}{3}R^3 + R^2 h' - \frac{h'^3}{3}\right]} = \frac{3\left(2R^2 h'^2 - h'^4 - R^4\right)}{4\left(2R^3 + 3R^2 h' - h'^3\right)}$$

Proben: Für h' = R folgt richtig $z_s = 0$
für h' = 0 folgt richtig $z_s = -3R/8$ (das ist gerade eine Halbkugel)
für h' = R/2 folgt richtig $z_s = -R/8$

Mit h' = h – R folgt eine etwas einfachere Formel

$$z_s = \frac{\left[Rh^3 - R^2 h^2 - \frac{h^4}{4}\right]}{\frac{h^2}{3}\left[3R - h\right]} = \frac{3\left[Rh - R^2 - \frac{h^2}{4}\right]}{\left[3R - h\right]}$$

Bezugspunkt ist Mittelpunkt der Kugel

6) *Ermittlung des Gesamtschwerpunkts Balance Becher mit Flüssigkeit (Wasser/Wein) für zwei Füllhöhen*
Was macht die Füllhöhe aus?
Befindet sich der Gesamtschwerpunkt gerade über dem Pol des Balance Bechers?

Der Becher wird bis zu einer Höhe von 44mm mit Wasser gefüllt. Also etwa 5mm unterhalb des Randes. Das ist ziemlich voll. Wein hat fast dieselbe Dichte wie Wasser.

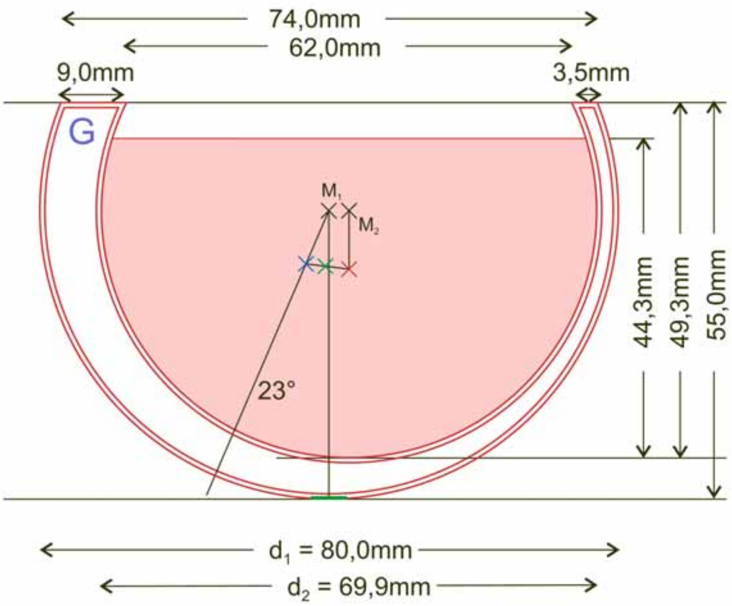
Das Volumen errechnet sich mit der unter 5) angegebenen Formel zu

$V_s = 124cm^3$, das entspricht 124g

Der Schwerpunkt errechnet sich mit der unter 5) angegebenen Formel zu

$z_S = -8{,}1mm$

Dieser Schwerpunkt liegt senkrecht unter M_2.



Aus dem Abstand des Gesamtschwerpunkts des Bechers (blaues Kreuz) und der Flüssigkeit (rotes Kreuz; Maße aus der Zeichnung entnehmen) und den zughörigen Massen errechnet sich ein Schwerpunkt, der mit dem grünen Kreuz gekennzeichnet ist. Dieser Schwerpunkt sollte idealerweise senkrecht unter M_1 liegen. Dann würde der Becher genau senkrecht stehen. Das ist hier nicht genau der Fall. Möglicherweise Mess- und Rechenungenauigkeiten?.
Gießt man noch etwas mehr Flüssigkeit ein, würde der Schwerpunkt noch etwas weiter nach rechts wandern. Bei weniger Flüssigkeit neigt sich der Becher nach links.

Wieso steht der Becher auch bei verschiedenen Füllhöhen noch gleich gerade?

Der Becher steht auch bei unterschiedlichen und relativ guten Füllhöhen noch immer senkrecht. Eine genaue Inspektion des Pols des Bechers ergibt, dass er dort etwas (ca. 0,2mm, siehe Bild) abgeflacht ist, so dass eine kleine, fast ebene Standfläche vorhanden ist. Die schwarze Linie ist ein gezeichneter Kreis mit dem Durchmesser des Bechers.