

Stehaufmännchen, Kolumbuseier und ein Gömböc

Christian Ucke und Hans Joachim Schlichting

Stehaufmännchen richten sich von selbst immer wieder auf. Einmal angestoßen, wackelt ein Stehaufmännchen als Rollpendel einige Male hin und her. Sogenannte Trickeier kann man auf das spitze Ende hinstellen. Sie fallen allerdings nach einiger Zeit um. Seit kurzem gibt es das Gömböc, ein dreidimensionaler, konvexer und homogener Körper mit nur einer stabilen Gleichgewichtslage.

Stehaufmännchen sind für Kleinkinder faszinierend. Man kann sie umstoßen, sie bleiben aber nicht liegen. Und sie wackeln hin und her. Faraday verwendete eine derartige Figur (Abbildung 1) in seinen berühmten Vorlesungen für die Jugend [1]. Klar beschreibt er den üblichen Aufbau, bei dem ein schweres Gewicht im unteren Bereich der kugelförmigen Unterseite den Schwerpunkt der Gesamtfigur so weit nach unten zieht, dass er beim Seitwärtsneigen nach oben bewegt wird und nach dem Loslassen wieder seine tiefste Lage einzunehmen versucht.



Abb.1: Klassische Stehauffigur nach Faraday [1].
Rot markiert das schwere Gewicht.

Die Bezeichnung Stehaufmännchen ist so nur im Deutschen geläufig. Sie wird in der Umgangssprache als ein Synonym für Menschen verwendet, die nach einem gesellschaftlichen, wirtschaftlichen oder auch gesundheitlichen Abstieg immer wieder nach oben kommen. Im Englischen heißt es roly-poly-toy, tumbler, wobbly man oder gar round-bottomed doll. Daraus geht deutlicher die Bewegung bzw. der Aufbau hervor.

Der Ursprung von Stehauffiguren lässt sich nicht eindeutig ausmachen. Unter der kürzeren Bezeichnung ‚stehauf‘ wurden schon vor zwei-hundert Jahren Stehauffiguren im Sinn von Stehaufmännchen verstanden. Unter demselben Namen gab es jedoch schon davor und gibt es noch heute Stehaufgläser, auch Tummler (Taumler) genannt. Diese becherartigen Trinkgefäße hatten einen konvexen, verdickten und damit schweren Glasboden und richteten sich – ohne Inhalt - nach einer Seitwärtskipfung wieder auf.

Analyse der Bewegung einer Stehauffigur

Physikalisch gesehen, liegt bei einem Stehaufmännchen der Schwerpunkt unter dem Krümmungsmittelpunkt der unteren, konvex gekrümmten Fläche. Einmal angestoßen wackelt ein Stehaufmännchen hin und her. In der Mechanik spricht man von Schwingungen eines Rollpendels.

Um die Schwingungen eines Stehaufmännchen genauer zu untersuchen, haben wir die Geruchsseife der Firma WMF [2] benutzt. Dieses Objekt aus Edelstahl in Eiform ist leicht erhältlich, hat eine halbkugelförmige Unterseite und verfügt darüberhinaus sogar noch über hygienisch-ästhetische Aspekte (Abbildung 2). Im Inneren ist unten eine Masse von 75g aus Gusseisen eingepresst. Viele Spielzeug-Stehaufmännchen haben keine kugelförmige Unterseite und sind auch nicht immer leicht verfügbar. Eine andere Stehauffigur mit einer kugelförmigen Unterseite stellt der Stehaufkreisel dar. Stehaufkreisel sind jedoch meist relativ klein und deswegen als Stehauffigur weniger attraktiv und schwieriger handhabbar.

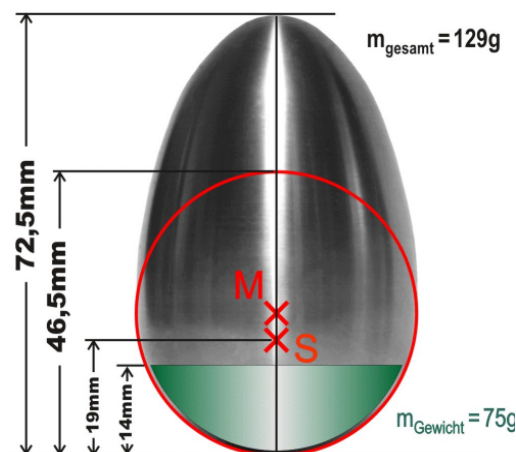


Abb.2: Die Geruchsseife von WMF als Stehauffigur. M ist der Mittelpunkt der unteren Halbkugel; S der Schwerpunkt der Gesamtfigur.

Bei kleinen Auslenkwinkeln hat die Geruchsseife eine Schwingungsdauer von $T = 0,83s$, bei großen Winkeln (70°) ist $T = 0,91s$. Das weist auf ein nichtlineares Verhalten hin, wie es sich auch aus der Differenzialgleichung ergibt (siehe Infobox). Die Schwingungsdauer ist umso größer, je kleiner der Abstand zwischen Schwerpunkt S und Krümmungsmittelpunkt M ist. Bei manchen Stehauffiguren kann man das durch Umschichten unterschiedlich auflegbarer Scheiben erreichen. Im Fall der Geruchsseife befestigt man einfach oben an der Spitze etwas Knetgummi oder Ähnliches.

Studenten der Ingenieurwissenschaften, Physik oder Mathematik müssen sich manchmal zu Übungszwecken mit der Berechnung einiger Varianten von Stehaufmännchen befassen (Abbildung 3, [3, 4]). Das ist allerdings hauptsächlich angewandte Mathematik. Der spielerische Aspekt geht dabei verloren. Die homogene Figur in Abbildung 3 richtet sich übrigens nicht mehr auf, wenn man sie bis auf den Kegelmantel zur Seite neigt. Die – in-homogene – Geruchsseife aus Abbildung 2 richtet sich hingegen aus jeder Position wieder auf.

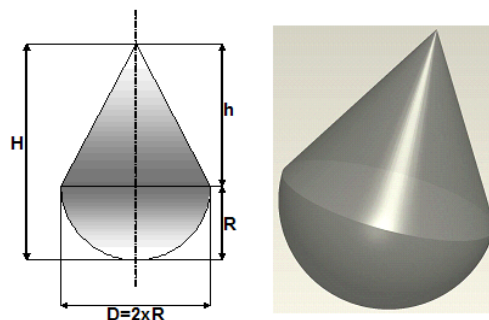


Abb.3: Berechnung eines homogenen Stehaufmännchens in Form einer Halbkugel mit aufgesetztem Kegel [3].

Infobox

Bewegungsgleichung eines Rollpendels

Wir betrachten einen auf einer horizontalen Ebene Zylinder bzw. eine Kugel, deren Mittelpunkt und Schwerpunkt sich nur in einer Ebene bewegen. Der Schwerpunkt S liegt im Abstand a vom Mittelpunkt M der Kugel mit dem Radius R (Abbildung 4). Wird die Kugel um den Winkel φ ausgelenkt, rollt sie hin und her.

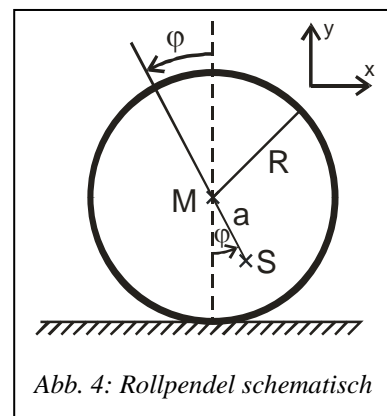


Abb. 4: Rollpendel schematisch

Bezeichnet man mit I_S das Trägheitsmoment der Kugel um die Schwerpunktsachse und mit m die Masse, dann lautet die exakte Bewegungsgleichung

$$[I_S + m(a^2 + R^2 - 2aR\cos\varphi)]\ddot{\varphi} + maR\sin\varphi \cdot \dot{\varphi}^2 + mga\sin\varphi = 0$$

Da die Differenzialgleichung analytisch nicht lösbar ist, muss sie numerisch mittels Programmen wie Mathematica, Matlab o. ä. berechnet werden.

Für kleine Winkel φ ergibt sich die Näherung

$$[I_S + m(R - a)^2]\ddot{\varphi} + mga\varphi = 0$$

Daraus folgt die Schwingungsdauer T für kleine Winkel φ

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_S + m(R - a)^2}{mga}}$$

Die komplette Herleitung der obigen DGL und die Ermittlung des Trägheitsmoments des Geruchsseife ($I_S = 456\text{gcm}^2$) ist unter den Materialien zu diesem Heft herunterladbar.

Das Ei des Kolumbus

Eine Anekdote besagt, dass Kolumbus bei einem Gastmahl beim Kardinal Mendoza im Jahre 1493 ein Ei dadurch auf einem Ende zum Stehen gebracht habe, dass er es mit Kraft aufschlug und dabei natürlich teilweise zerbrach. In einer Erzählung von Vasari wird berichtet, dass der italienische Baumeister Filippi Brunelleschi schon mehr als fünfzig Jahre vorher das gleiche Kunststück vollbracht habe, als er seine Konstruktion der Kuppel des Doms zu Florenz demonstrierte. Eine andere Quelle beschreibt sogar eine noch viel frühere, orientalische Version dieser Vorführung [5]. Was auch immer stimmt, unsere Geruchseife ist von der Form her ein Ei und steht auf einem Ende. Natürlich deswegen, weil die Massenverteilung im Inneren inhomogen ist.

Eine noch etwas raffiniertere Form des Kolumbuseis war vor mehreren Jahren unter dem Namen ‚Trickei‘ (Abbildung 5) als Spielzeug erhältlich. Es handelt sich um ein Plastik-Ei, das sich tatsächlich auf das spitze Ende stellen lässt, aber nur für eine gewisse Zeit, denn ohne Vorwarnung fällt es plötzlich doch um. Die Kunst besteht nun darin, das Ei anschließend erneut auf das spitze Ende zu stellen. Das gelingt nur, wenn man die innere Struktur des Eis erahnt oder kennt. Tatsächlich enthält das Ei eine unsymmetrische Sanduhr. Hält man das Ei lange genug so, dass der ganze Sand in den symmetrischen Teil fließen kann (5a), gelingt es, das Ei für eine kurze Zeit auf das leicht abgeflachte spitze Ende zu stellen (5b). In Abbildung 5c befindet sich der Schwerpunkt nicht mehr über der Auflagefläche. Das Ei kann daher so nicht stabil stehen.

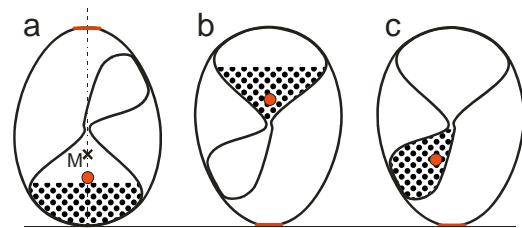


Abb.5: Das Trickei mit unsymmetrischer Sanduhr im Inneren. Der rote Punkt markiert den Schwerpunkt S , die rote Linie ist die abgeflachte Auflagefläche, M der Mittelpunkt des kugelförmigen, breiteren Eiendes.

Derartige Überraschungseier bzw. –figuren sind als ‚Zaubertrick‘ beliebt. Schon Dussler [6] beschreibt das. Zwar nicht in Eiform, aber im Inneren ähnlich aufgebaut, ist zur Zeit ein Hypnosepüppchen erhältlich [7].

In einem ‚Zauberbuch‘ aus dem Jahr 1702 [8] ist eine Methode beschrieben, wie man ein normales Ei nach einer etwas ominösen Behandlung und ohne es zu zerbrechen, auf die Spitze stellen kann (Abbildung 6a). Der Verfasser (CU) hielt das für sehr unwahrscheinlich. Experimentell ließ sich das jedoch eindrucksvoll bestätigen (Abbildung 6b).

Es erscheint uns gänzlich unplausibel, dass sich das Eiinnere durch das Schütteln in einer Weise verändert, dass der Schwerpunkt unter den Krümmungsradius der Spitze zu liegen kommt. Der Schwerpunkt kann sich höchstens etwas verschieben, wenn das Dotter aus seiner Halterung gelöst wird. Eine mögliche Erklärung könnte darin bestehen, dass die Oberfläche von Eiern nicht wirklich glatt ist, sondern Unregelmäßigkeiten aufweist, die letztlich eine kleine, ebene Fläche bilden, oberhalb derer der Schwerpunkt des Eies bei genügend Geduld positioniert werden kann. Wir sind an Erfahrungen und Ideen unserer Leser interessiert.

XLV,

Ein Ey/ ohne es zu zerbrechen/ auf den Tisch ste-
hend zu machen.

Man nehme ein Ey/ zerschüttle es bey einer Bier-
telstund lang in der Hand/ so lang nemlich/ biß dessen
Dotter zerschellet wird.

Darnach trage es vor das Angesicht der Zus-
chauer/ setze dasselbe auf der Spitzen auf einen glat-
ten Tisch nieder/ wiege es lang mit beyden Händen/
bald dorthin/ bald hieher/ biß es endlich still stehe.



Abb.6a, b: Ausschnitt aus dem Zauberbuch aus dem Jahr 1702 [8] sowie eine Aufnahme eines auf einem Porzellanteller stehenden Eis. So eine Aufnahme ist natürlich kein wirklicher Beweis.

Das Gömböc

Die Geruchseife in Eiform hat genau eine stabile Lage an dem flachen Ei-Ende und eine labile Position auf der Ei-Spitze. Das ist auf Grund der besonderen inhomogenen Massenverteilung möglich. Ein normales Ei – homogene Massenverteilung im Inneren und Rotationssymmetrie vorausgesetzt - hat zwei labile Gleichgewichtslagen und längs des „Äquators“ unendlich viele Punkte, auf denen es liegen bleibt (indifferentes Gleichgewicht). Der homogene Stehaufkegel in Abbildung 3 hat eine stabile und eine labile Position und ebenfalls unendlich viele indifferente Positionen, wenn er auf dem Kegelmantel liegt. Die beiden ungarischen Mathematiker Gábor Domokos und Péter Várkonyi haben sich gefragt, ob es



Abb.7: Das Gömböc weist eine gewisse Ähnlichkeit mit einem Faustkeil auf.

einen konvexen, dreidimensionalen Körper mit homogener Massenverteilung mit genau einer stabilen und einer labilen Gleichgewichtsposition gibt. Angeregt wurden sie dazu schon 1995 durch den russischen Mathematiker Arnold. Die Frage führte im Jahre 2006 im Ergebnis zum Gömböc (ungarisch für Dickerchen oder Knödel), einem konvexen Körper mit homogener Massenverteilung, im Aussehen einem Faustkeil ähnlich. Das Gebilde richtet sich aus jeder Lage nur aufgrund seiner Form mit scheinbar unregelmäßigen Rollbewegungen bis zu seinem stabilen Endzustand auf [9]. Das Modell in Abbildung 6 ist aus Aluminium und hat bei einem Durchmesser von etwa 9 cm eine Masse von 1 kg. Die Fertigung muss dabei auf mindestens 0,1mm genau erfolgen.

Interessanterweise gibt es ein Vorbild in der Natur, nämlich eine indische Sternschildkröte. Fällt sie auf ihren Rücken, dreht sie sich ähnlich wie ein Gömböc wieder auf ihre Füße, ihre eigentlich stabile und natürliche Lage.

Eigenbau

Eine Stehauffigur ist mit geringem Aufwand selbst zu bauen. Man braucht nur eine hohle Halbkugel aus Plastik (Bastelgeschäft) und füllt sie mit einer Masse wie Plastilin oder Gips. Gegebenenfalls setzt man noch schwerere Teile unten in die Halbkugel dazu. Der Schwerpunkt bei einer homogenen Halbkugel liegt in einem Abstand $z_s = 3/8 \cdot R$ vom Mittelpunkt der Kugel. Auf die Halbkugel kann man etwas wie eine menschliche Figur aus leichtem Material aufsetzen und hat dann schon eine Stehauffigur, wie sie in der Abbildung 1 von Faraday zu sehen ist (Abbildung 8). Natürlich muss man anpassen, mit dem Aufbau den Schwerpunkt der Gesamtfigur nicht zu nahe an oder gar über den Mittelpunkt der Halbkugel zu führen.



Abb.8: Selbstbau Stehauffigur

Ein Trickei zu bauen, erfordert etwas mehr Aufwand und Geduld. An der Spitze eines transparenten Acryleis (Bastelgeschäft) schleife man eine ebene (Stand-)Fläche mit einem Durchmesser von etwa einem Zentimeter ab. Das leere Ei muss senkrecht auf dieser Fläche stehen können. Im Acrylei befestige man im Inneren eine Sanduhr schief so, dass das Ei auf der Spitze steht, wenn der Sand sich gerade im oberen Teil befindet. Dieser Teil ist kritisch und erfordert Fingerspitzengefühl. Wir haben für eine vorläufige Befestigung Tesafilm verwendet, da man damit nachjustieren kann (Abbildung 9). Empfehlenswert sind Sanduhren mit eher kurzer Laufzeit (30s bis 60s). Am Ende kann man das Acrylei übermalen, um den Trick zu verstecken.



Abb.9: Selbstbau Trickei

Literatur bzw. weblinks:

- [1] Faraday, M.: Course of six lectures of the various forces of matter and their relations to each other, London 1860, <http://tinyurl.com/d73msnm>
herunterladbar unter:
http://books.google.de/books?id=69DaAAAAMAAJ&printsec=frontcover&hl=de&source=gbs_ge_summary_r&cad=0#v=onepage&q&f=false
in Deutsch:
Die verschiedenen Kräfte der Materie und ihre Beziehungen zu einander. Sechs Vorlesungen für die Jugend, übersetzt von H. Schröder, Robert Oppenheim, Berlin 1872
- [2] www.wmf.de/shop/#q%3Dgeruchseife
- [3] https://srv.rz.uni-bayreuth.de/lehre/maple/uebung/projekt_ws06/sw/stehaufmaennchen.html
- [4] <http://matheplanet.com/> Stichwort Stehaufmännchen
- [5] http://de.wikipedia.org/wiki/Ei_des_Kolumbus
- [6] Dussler, G.: Spiel und Spielzeug im Physikunterricht, Frankfurt a.M. 1933
- [7] www.hund-hersbruck.de/web_neu/?page_id=4151
- [8] S. Witgeest: Natürliches Zauber-Buch. Nürnberg 1702
(kann über <http://books.google.de> direkt eingesehen werden; viele Auflagen!).
- [9] www.gomboc-shop.com/app/urwfilter/start/do/localecode/de/index.html

Mit folgenden Stichwörtern findet man Webseiten und bei YouTube videos zum Thema: Stehaufmännchen, Stehauffigur, roly-poly toy, wobbly man, Trickei, Ei des Kolumbus, Gömböc

Zusammenfassung

Stehaufmännchen richten sich von selbst immer wieder auf. Einmal angestoßen, wackelt ein Stehaufmännchen als Rollpendel hin und her. Sogenannte Trickeier kann man auf das spitze Ende hinstellen. Sie fallen allerdings nach einiger Zeit um. Das Gömböc ist ein dreidimensionaler, konvexer und homogener Körper mit nur einer stabilen Gleichgewichtslage, ähnlich wie ein Stehaufmännchen. Es wurde erst 2006 erfunden.