

# Mathematisch-Physikalische Spielzeuge

*Christoph Engelhardt und Christian Ucke*

Technische Universität München

## Inhalt

- 20' 1) Einleitung und Vorstellung diverser Objekte
- 20' 2) Zwei Objekte mit genauerer Erklärung
  - a) Zwei-Scheiben-Roller/Wobbler (*Engelhardt*)
  - b) Büroklammerkreisel (*Ucke*)
- 5' 3) Hinweise auf Literatur und Beschaffung

Σ 45'

Meine Damen und Herren,

Wir, d.h. Christoph Engelhardt und ich möchten Ihnen einige mathematisch-physikalische Objekte vorstellen, die einen spielerischen Charakter aufweisen. Um die Vielfalt derartiger Objekte zu demonstrieren, werden wir zunächst einige Dinge zeigen, ohne vertieft auf deren mathematisch-physikalischen Hintergrund einzugehen. Danach wird jeder von uns ein Spielzeug etwas genauer präsentieren. Abschließend werden wir einige Hinweise zur Beschaffung der Objekte und auf wichtige Literatur zu diesem Thema geben.

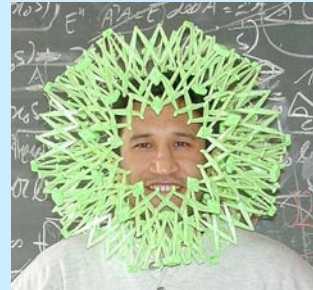
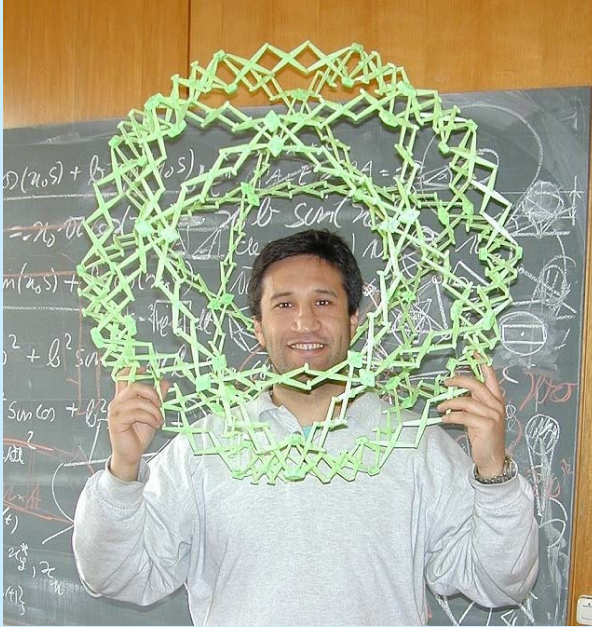
Wir möchten darauf hinweisen, dass wir diese Folien mit Erklärungen als pdf-File ins Internet stellen. Unter der URL <http://www.e20.physik.tu-muenchen.de/~cucke/> können Sie sie herunterladen.

Oder [www.ucke.de](http://www.ucke.de)

## **Warum physikalisch/mathematisches Spielzeug ?**

- Didaktik: Lernen durch Spielen
- Fördert Kreativität
- Macht einfach Spaß!!!

# Die HOBERTMAN-Sphäre



# Möbiusband



Ein Ring mit nur einer Seite



# KLEINsche Flasche



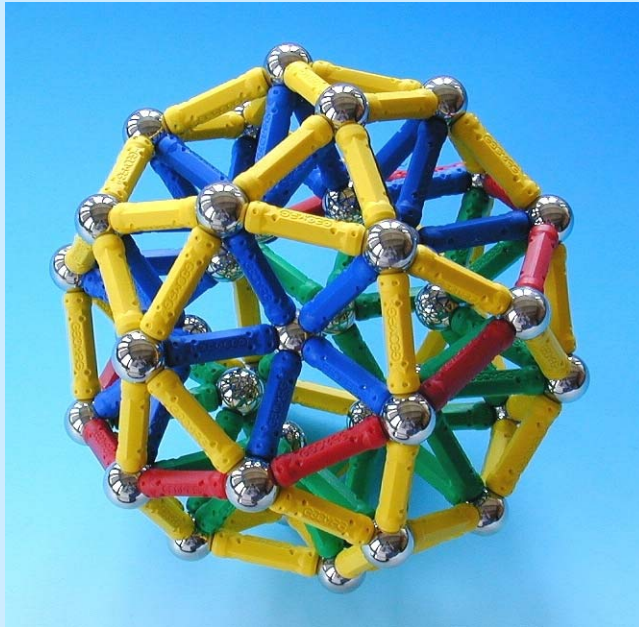
# KLEINscher Becher



# Von der KLEINschen Flasche zum Möbiusband



# Geomag

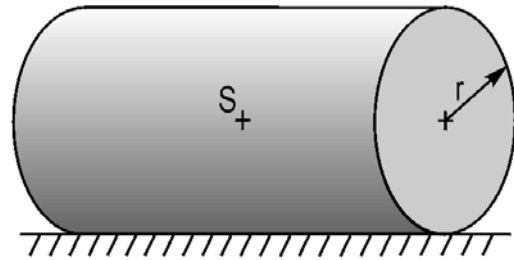
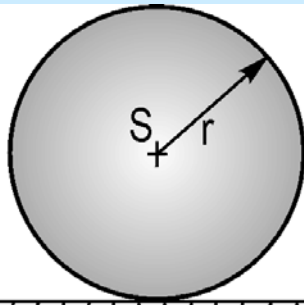


# Zwei-Scheiben-Roller

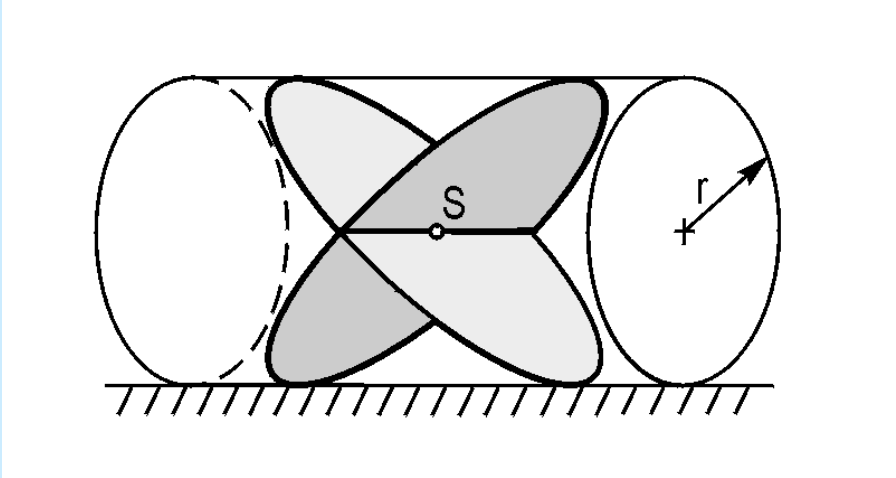


Mathematik und Physik mit Bierdeckeln

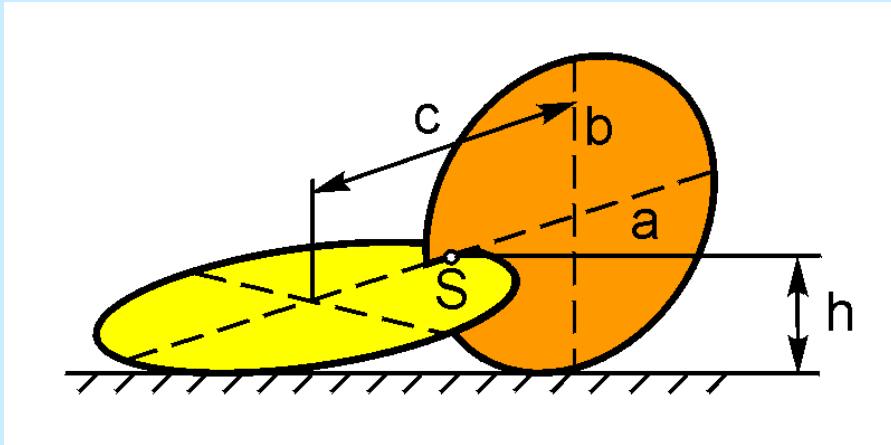
# Allgemeine Fragestellung:



# Zwei-Scheiben-Roller aus Ellipsen

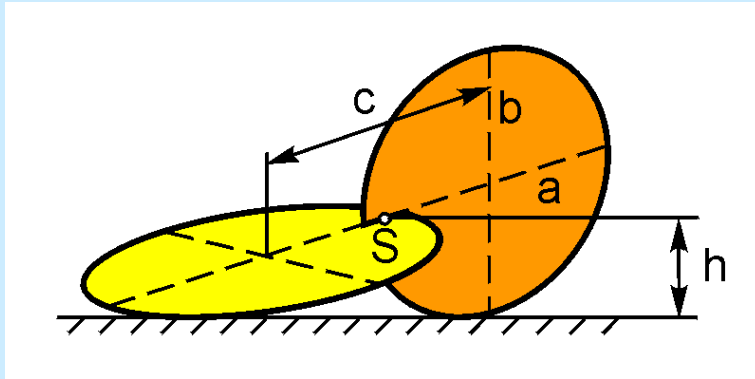


Ansatz für einen *anderen*  
Zwei-Scheiben-Roller aus Ellipsen:  
**Der „Wobbler“**



Die **geometrische Bedingung**  
an den Wobbler, so dass  $h = \text{const.}$  :

$$c^2 = 4a^2 - 2b^2$$



## Beispiele des Wobblers:

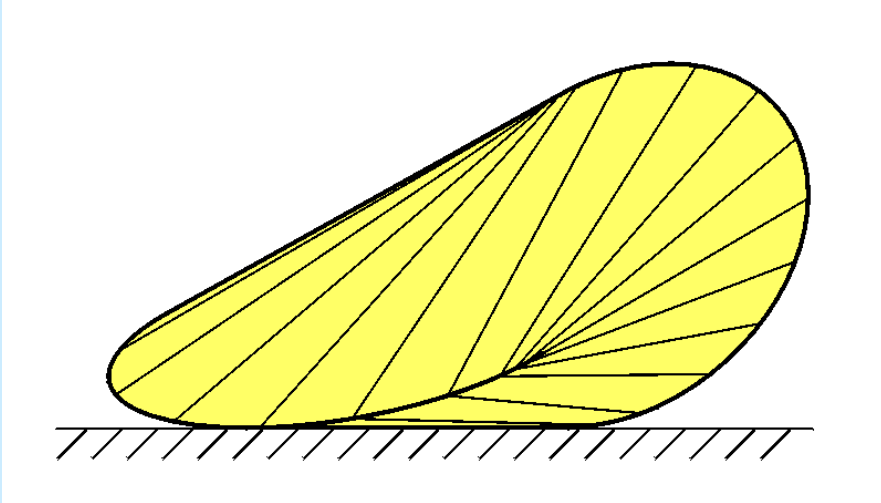
- Kreisförmige Bierdeckel ( $a = b = r$ )
- Ellipsenförmige Bierdeckel



# Die „Tennisballkurve“



Die „Verbindungsfläche“ aller  
Auflagepunktepaare („Verbindungstorse“)



# Spielzeug und Kunst im Wobbler-Look



# Das Oloid (Paul Schatz)



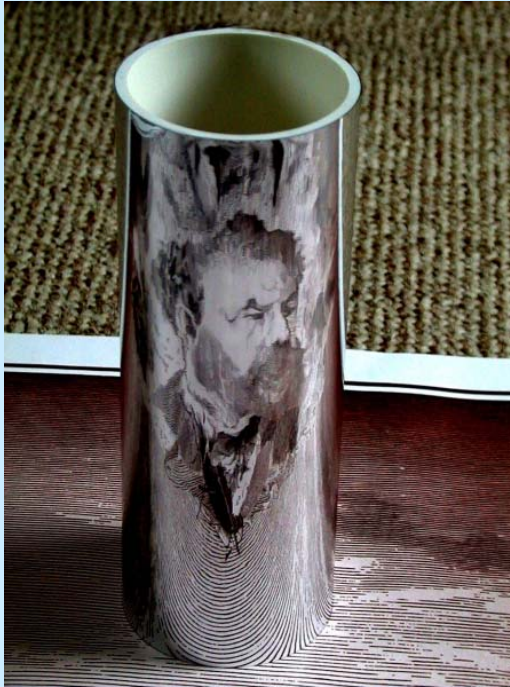
# Der „Taumelkreisel“ (Christoff Guttermann)





Dieses Bild stellt eine unwirtliche, arktische Landschaft dar. Im Hintergrund befindet sich offenbar ein Schiffswrack. Soweit nichts besonders.

# Anamorphosis Jules Verne



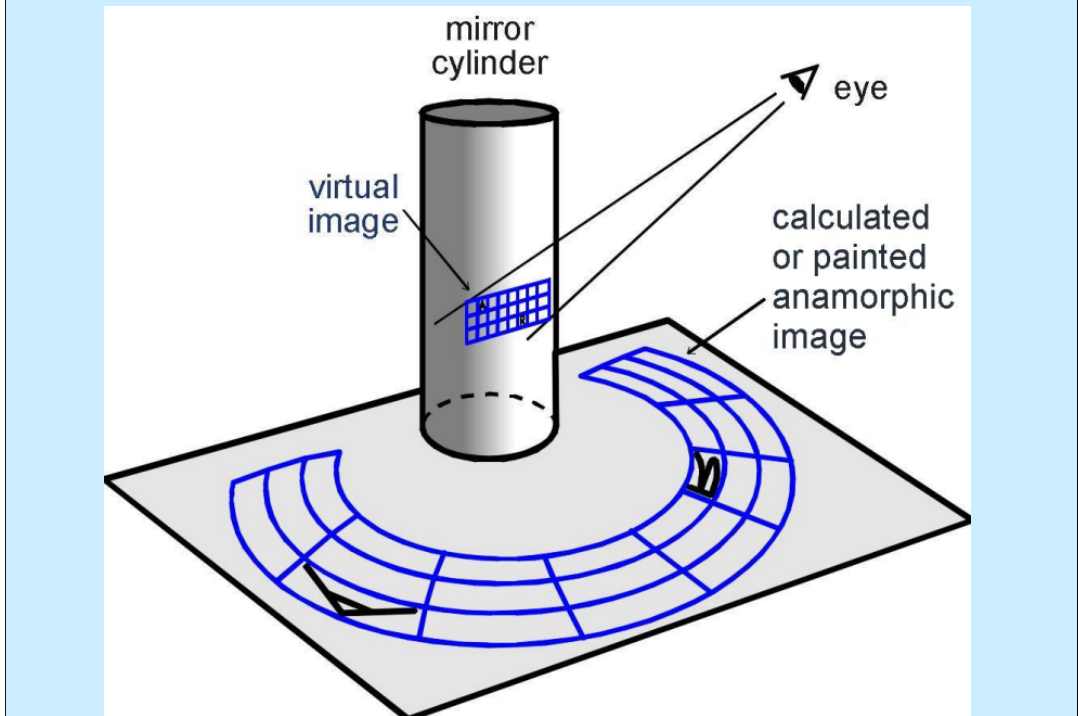
*István  
Orosz  
Ungarn*

Stellt man jedoch einen spiegelnden Zylinder auf den Mond (oder Sonne?), erkennt man im Spiegel ein Gesicht. Es handelt sich übrigens um Jules Vernes. Und das Bild stammt von dem ungarischen Künstler Istvan Orosz und heißt Anamorphosis Jules Verne.

Da hier ein Zylinderspiegel benutzt wurde, nennt man dieses Bild auch eine Zylinderanamorphose.

Man kann auch andere Spiegelformen verwenden und entsprechend verzerrte Bilder dazu malen, dann spricht man von Kegelanamorphosen, Kugelanamorphosen usw.

# Zylinderanamorphosen



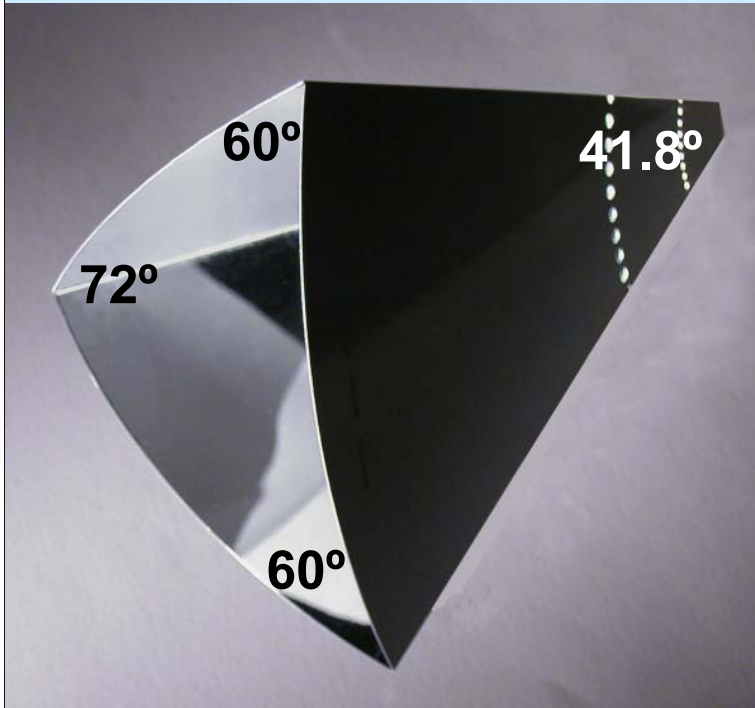
Wofür sind solche Anamorphosen nützlich?

Berühmte Maler wie Leonardo da Vinci, Holbein der Ältere oder Dalí haben derartige Anamorphosen gemalt. Auch in China ist diese Technik sehr verbreitet. Es ist eine Technik der Verfremdung und des Versteckens von Inhalten.

Ein Schüler eines Gymnasiums in Pfaffenhofen hat im Rahmen seiner Facharbeit vor einigen Jahren ein Programm geschrieben, mit dem sich beliebige Vorlagen anamorphotisch verzerren lassen. Er hat damit dann sogar einen Preis bei Jugend forscht gewonnen. Heute studiert er Informatik hier an der TUM.

Hier ist ein Bild von mir, aufgenommen mit einer Digitalkamera und mit seinem Programm zylinderanamorphotisch verzerrt.

# Kaleidoskop Pentakis



*Caspar  
Schwabe  
Zürich*

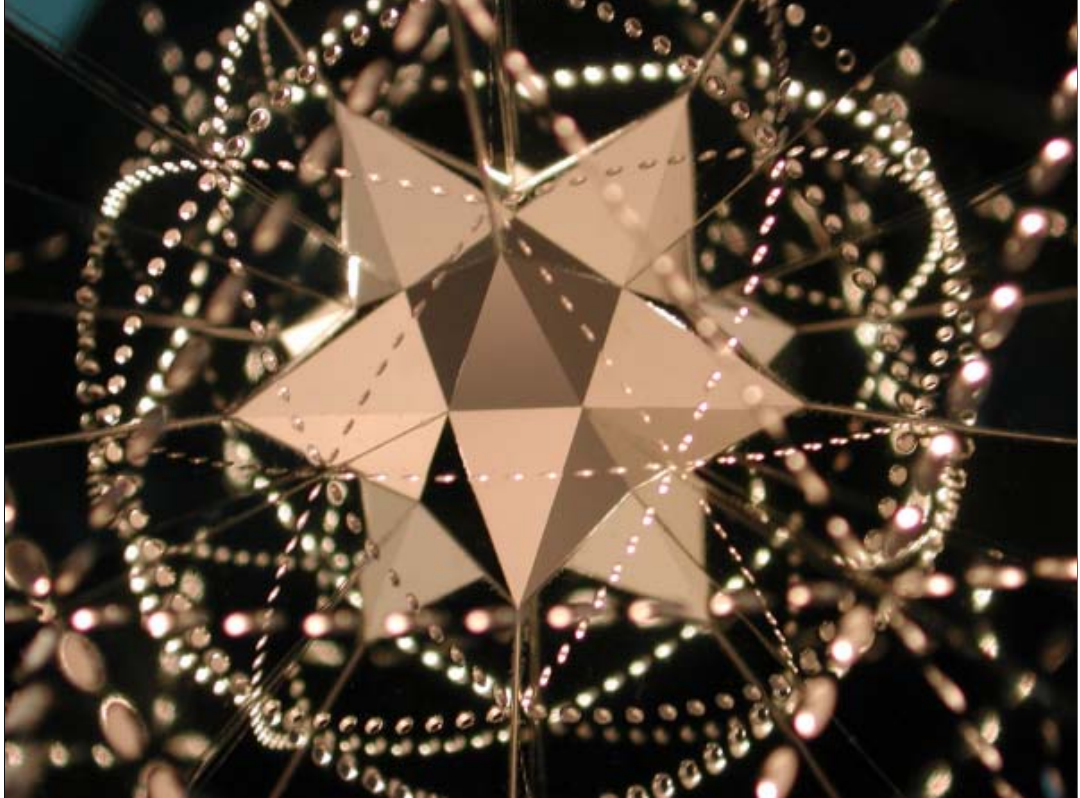
Das Kaleidoskop wurde 1817 von dem schottischen Physiker Sir David Brewster patentiert.

Physiker, Mathematiker und Künstler haben sich mit allen möglichen Abarten von Kaleidoskopen befasst.

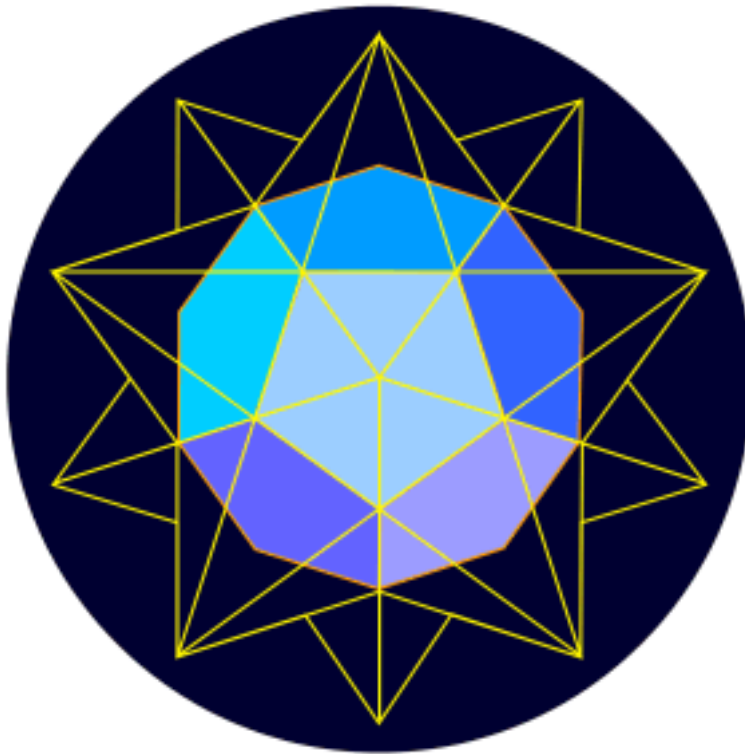
Hier möchte ich ein Kaleidoskop des Schweizer Künstlers Caspar Schwabe vorstellen, das sich einerseits durch eine große Einfachheit auszeichnet, andererseits jedoch eine ganze Menge Mathematik enthält.

Es sind eigentlich nur drei spiegelnde Flächen vorhanden, die im Winkel von 60 bzw. 72 Grad zueinander angeordnet sind. Endseitig ist der Endkegel unsymmetrisch abgeschnitten. Dazu sind eine Menge Löcher hineingebohrt. Es ergibt sich ein dreidimensionaler Eindruck!

Gegen das Licht gehalten entdeckt man plötzlich ein Dodekaeder bzw. einen zwölfstrahligen Keplerstern.



Beim Hineinblicken hat man einen überaus starken 3-D-Eindruck, der sich in diesem Bild gar nicht wiedergeben lässt.

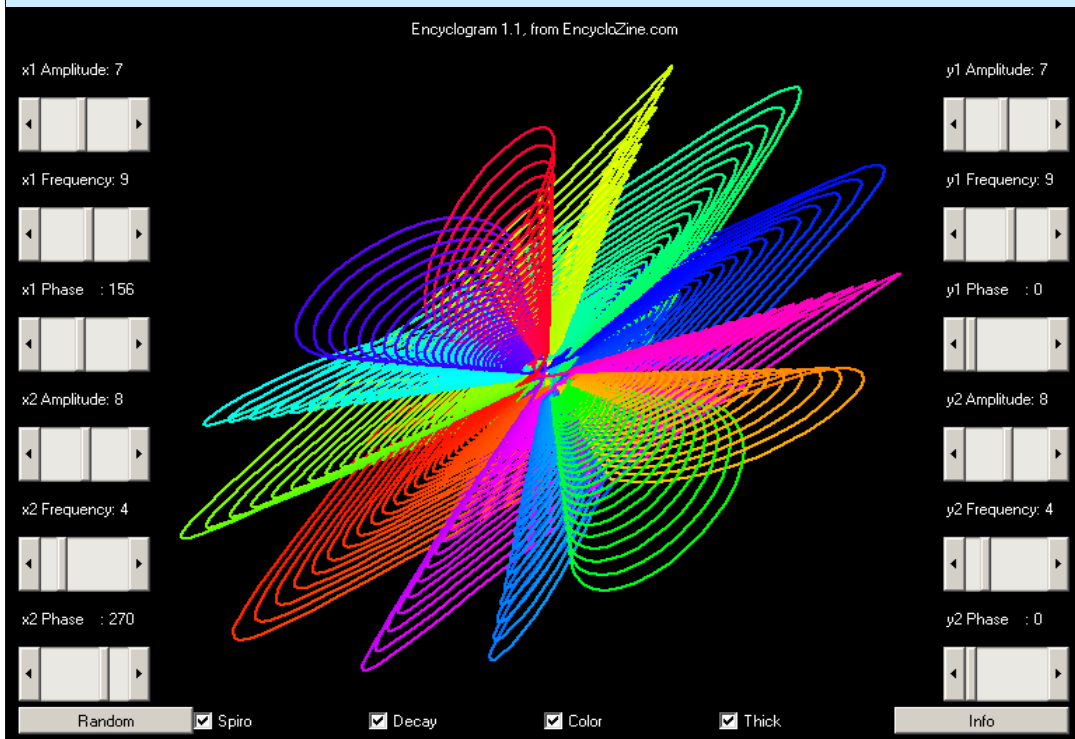


**Dodekaeder  
erweitert zum  
sog.  
Keplerstern**

Erst Kepler kam auf die Idee, das Dodekaeder zu dem nach ihm benannten Stern zu erweitern



Der Amerikaner Denys Fischer kreierte 1965 den Spirographen. 1967 wurde es zum Spiel des Jahres gekürt. Obwohl heute sehr viele Spirograph Computerprogramme existieren, hat das mechanische Zeichnen derartiger Kurven noch immer seinen Reiz.



Dies ist eines der vielen Programme oder Java-Applets, die im Netz unter dem Stichwort Spirograph zu finden sind.

# Büroklammer-Kreisel (Sakai-top)



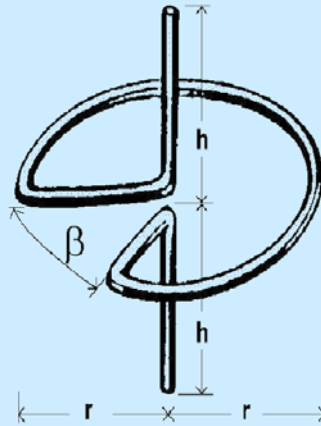
Die Büroklammer ist eine norwegische Erfindung aus dem Jahre 1899. Diese Briefmarke stammt von 1999.

Wie kann man aus einer Büroklammer einen Kreisel machen. Die Büroklammer steht nur für ein leichtes und überall erhältliches Drahtstück. Prof. Takao Sakai aus Japan hat einige Ideen dazu entwickelt, um an dieser Aufgabe seine Studenten zu fordern.

Die Büroklammer ist eine norwegische Erfindung aus dem Jahre 1899. Johan Vaaler patentierte sie in Deutschland (siehe das schwach-graue untergelegte Wort "Patentschrift"), weil Norwegen zu der Zeit noch kein Patentamt hatte. 1999 erschien diese Gedenkbriefmarke.

# Büroklammer-Kreisel (Sakai-top)

## 1. Lösung



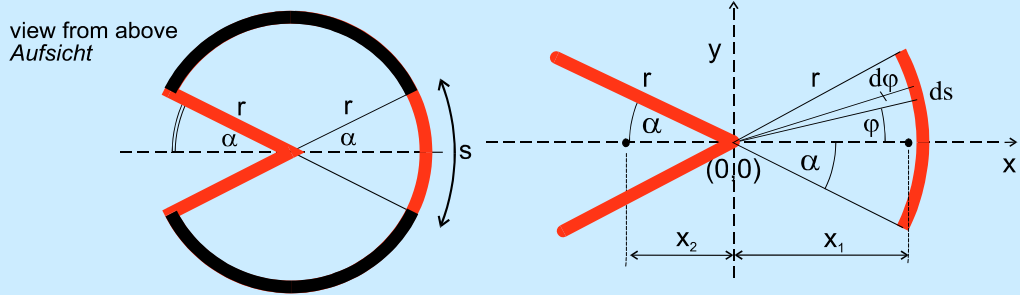
T. Sakai: Topics on tops which enable anyone to enjoy himself,  
Mathematical Sciences (Surikagaki = 数理科学) 271, 18-26 (1986)

Dies ist die Lösung von Takao Sakai. Sie braucht keinen Klebstoff oder gar Löten oder Schweißen. Zunächst erkennt man die Achse des Kreisels. Um ein großes Trägheitsmoment zu erhalten, sollte soviel Masse wie möglich soweit von der Achse wie möglich angebracht sein. Das ist der Fall, wenn der Draht auf einem Kreis um die Achse angeordnet ist. Da der Kreis aber nicht frei schweben kann, muss eine Verbindung vom Kreis zur Achse vorhanden sein. Dies geschieht über zwei Speichen.

Die Frage lautet nun, wie groß der Winkel zwischen den Speichen sein muss, damit der Schwerpunkt von Kreisring und Speichen genau in der Achse liegt? Liegt der Schwerpunkt nämlich nicht in der Achse, rotiert der Kreisel sehr schlecht oder gar nicht.

Dieser Kreisel ist übrigens ein sogenannter unsymmetrischer Kreisel, da die Trägheitsmomente  $I_x$  und  $I_y$  nicht gleich sind.

# Büroklammer-Kreisel (Sakai-top)



Schwerpunkt des  
Kreisbogens

$$x_1 = \frac{1}{s} \int x ds = \frac{1}{s} \int_{-\alpha}^{+\alpha} r \cdot \cos \varphi \cdot r \cdot d\varphi = \frac{2r^2}{s} \sin \alpha$$

Moment des Kreisbogens

$$M_1 = m_1 \cdot x_1 = 2r^2 \rho \cdot \sin \alpha \quad \rho = \text{Dichte pro Länge}$$

Schwerpunkt der Speichen

$$x_2 = \frac{r}{2} \cos \alpha$$

Moment der Speichen

$$M_2 = m_2 \cdot x_2 = r^2 \cdot \rho \cdot \cos \alpha$$

$$M_1 = M_2 \Rightarrow \tan \alpha = \frac{1}{2} \quad \text{or} \quad \alpha = 26.57^\circ \quad \text{or} \quad \beta = 2\alpha = 53.13^\circ$$

Der Winkel kann berechnet werden.

Dazu vernachlässigt man die beiden schwarz gezeichneten Teile, die ja symmetrisch zum Mittelpunkt liegen.

Der Schwerpunkt des rot gezeichneten Kreisbogens kann – wie angeführt - mit Hilfe eines Linienintegrals berechnet werden. Bitte versuchen Sie nicht, das jetzt hier nachzuvollziehen. Man kann dieses Bild von meiner homepage herunterladen.

Das Moment des Kreisbogens bezüglich der Achse ist dann das Produkt aus der Masse und dem Abstand  $x_1$ .

Der Schwerpunkt der Speichen und deren Moment ist leichter berechnet.

Setzt man beide Momente gleich, resultiert die einfache Bestimmungsgleichung  $\tan \alpha = 0.5$  oder  $\alpha = 26.57^\circ$  oder  $\beta = 53.13^\circ$ .

Biegt man so einen Kreisel aus einer Büroklammer, erreicht man meist nicht den exakten Winkel. Das ist aber auch nicht sehr wichtig. Wichtig ist nur, dass der Schwerpunkt aus Kreisbogen und Speichen in die Achse zu liegen kommt. Das kann man durch Herumbiegen immer irgendwie erreichen.

# Büroklammer-Kreisel (Sakai-top)

## Näherung

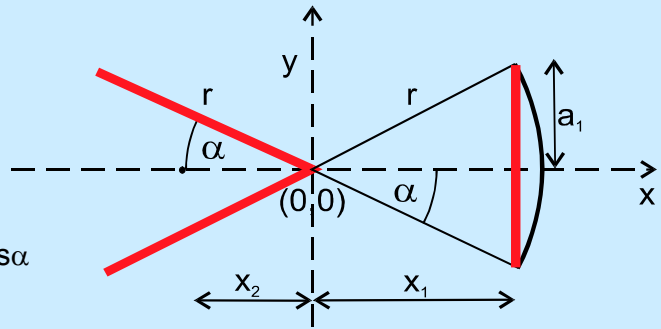
$$x_1 = r \cdot \cos \alpha$$

$$M_1 = m_1 \cdot x_1 = 2r^2 \cdot \rho \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$x_2 = r/2 \cdot \cos \alpha$$

$$M_2 = m_2 \cdot x_2 = r^2 \cdot \rho \cdot \cos \alpha$$

$$M_1 = M_2 \text{ ergibt } \sin \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 30^\circ \text{ oder } \beta = 60^\circ$$



Das Linienintegral ist in der Schule nicht üblich. Als Näherung kann man den Kreisbogen durch eine Sehne ersetzen.

Die Näherung ergibt die ebenso einfache Bestimmungsgleichung  $\sin \alpha = 0,5$ , woraus sich ein Winkel von  $\alpha = 30^\circ$  bzw.  $\beta = 60^\circ$  ergibt.

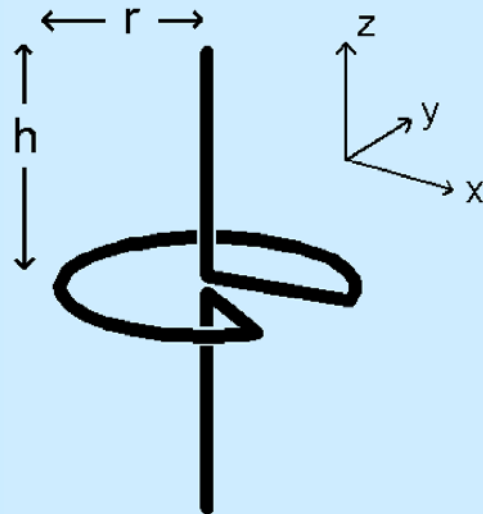
# Büroklammer-Kreisel (Sakai-top)

Instabiler Kreisel  
für  $h = 1.65 \cdot r$

$$I_x < I_z < I_y$$

$I$  = Trägheitsmoment;

$I_z$  = Trägheitsmoment relativ  
zur z-Achse usw..



Physiker und Ingenieure wissen, dass ein Kreisel nur um die Achse mit dem maximalen und minimalen Trägheitsmoment stabil rotieren kann. Wenn die Kreiselachse mit dem mittleren Trägheitsmoment zusammenfällt, ist der Kreisel instabil.

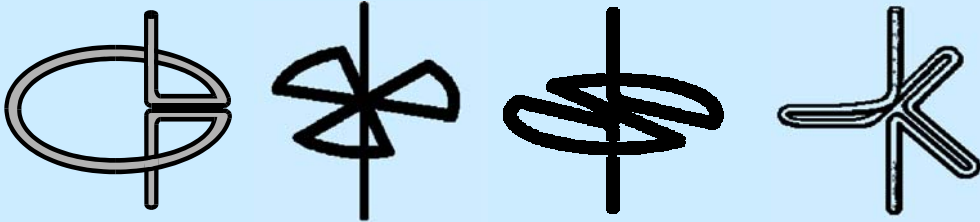
Genau das kann man beim Büroklammerkreisel auch erreichen, wenn die in der Abbildung angegebenen Verhältnisse vorhanden sind.

# Büroklammer-Kreisel (Sakai-top)

reale (weiß-blaue)  
Ausführung



Weitere Möglichkeiten



Hier ist die reale Ausführung eines Büroklammerkreisel. Bitte beachten Sie die weiß-blaue Farbgebung.

Ein realer Kreisel kann sich mit mehreren tausend Umdrehungen pro Minute drehen.

Derartige Büroklammern, die sich sehr gut zur Herstellung von Büroklammerkreisel eignen, verteilte ich jetzt.

Wir werden jetzt aber nicht zusammen Kreisel biegen. Das kostet nach aller Erfahrung zuviel Zeit.

Weitere Möglichkeiten zur Herstellung von Büroklammerkreisel sind unten gezeigt.



23. Nov. 2002



Christoph Engelhardt [cengelh@mathematik.tu-muenchen.de](mailto:cengelh@mathematik.tu-muenchen.de)

Christian Ucke [cucke@ph.tum.de](mailto:cucke@ph.tum.de)