Este artículo es una versión modificada del original publicado en alemán en la revista *Physik in unserer Zeit* ***36*** *(2005), 33-35*
Se puede descargar bajo http://www.ucke.de/christian/physik/ftp/lectures/fisica_con_clips.pdf

Experimentos prácticos de física con clips

Christian Ucke

Clips existen en todo el mundo. Con ellos se pueden hacer asombrosos experimentos de la física y en las matemáticas, por ejemplo se pueden construir trompos simples o también demostrar puentes colgantes.

El invento del clip se atribuye al noruego **Johan Vaaler**. Fue patentado en 1899 en Alemania debido a que en aquellos tiempos no había una oficina de patente en Noruega. En 1999 se hizo una estampilla para conmemorar este invento (Figura 1). Vaaler no comercializó su invento. Esto ocurrió en Estados Unidos poco tiempo después, quienes declaran que este invento había sido patentado anteriormente en USA. Entretanto existe una gran variedad de clips y se ocupan en millones.

Figura 1: El clip fue inventado 1899 en Noruega.

Trompos hechos de clips

¿Cómo se puede hacer un trompo de un clip de la manera mas simple? El Japonés **Takao Sakai** describe algunas construcciones interesantes [1]. Doblando el alambre del clip en forma circular de tal modo que el centro de gravedad de la trompo está en el eje de la trompo, el cual esta compuesto de dos mitades de eje (Figura 2). Para una construcción correcta, el ángulo ß entre los dos radios tiene que ser de 53.13°. El cálculo de este ángulo es una interesante tarea para los estudiantes de física en su primer año de estudios (veáse información anexa 1).

Para la construcción de este trompo se recomienda usar un clip de alambre blando. Así se puede formar sin usar alicate. No es necesario respetar completamente el ángulo o la forma de un círculo perfecto. Lo esencial es que el centro de gravedad tiene que estar en el eje. Por lo demás se pueden hacer varias otras contrucciones de trompos de este tipo con clips [2].

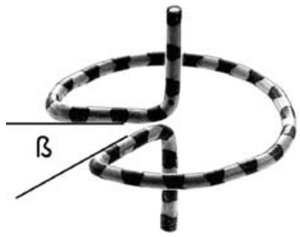

Figura 2: Una trompo que se puede formar con un clip.

De gran simplicidad es la construcción del trompo que se da la vuelta (inglés tippe-top, Figura 3) hecho con un clip, publicada por **Yoshio Kamishina** [3]. Como se puede ver en la figura el centro de gravedad del trompo no coincide con el centro del círculo exterior. Este es una característica en la construcción clásica del trompo que se da vuelta, que normalmente se compone de una parte de una esfera con una espiga cilíndrica.

Figura 3: Una trompo que se da vuelta hecha con un clip grande.

Hacer rotar este trompo no es fácil, debido a que al cogerla por su borde no se logra una alta rotación. Mejor es cuando se hace rotar usando los índices de ambas manos en dirección contraria aplicados simultáneamente a los bordes opuestos del círculo. Requiere práctica. El efecto del trompo que se da vuelta se ve claramente en este caso.

Este artículo es una versión modificada del original publicado en alemán en la revista *Physik in unserer Zeit* ***36*** *(2005), 33-35*
Se puede descargar bajo http://www.ucke.de/christian/physik/ftp/lectures/fisica_con_clips.pdf

El fenómeno de este tipo de trompo no tiene una explicación fácil. Casi cien años ya, físicos han tratado de explicar este problema en diversas publicaciones. En un libro alemán de mecánica teorética, el autor **Kuypers** [4] expone este problema como un ejercicio difícil para los estudiantes avanzados en física.

Cadenas hechas con clips

¿Qué curva forma una cadena o un cable flexible o una soga a la que se sostiene por sus extremos? Galileo Galilei ya se planteó este interrogante y encontró una respuesta errónea al suponer que se trataba de una parábola. Fue recién a fines del siglo XVII cuando los hermanos Jacob y Johann Bernoulli, al igual que Gottfried Wilhelm Leibniz y Christiaan Huyghens, dedujeron cuál era la forma correcta. Se trata de la función coseno hiperbólico (cosh), la que puede expresarse también como la suma de dos funciones exponenciales. La deducción de la curva catenaria figura en muchos libros de texto de matemáticas o mecánica, por eso no se la reproduce aquí.

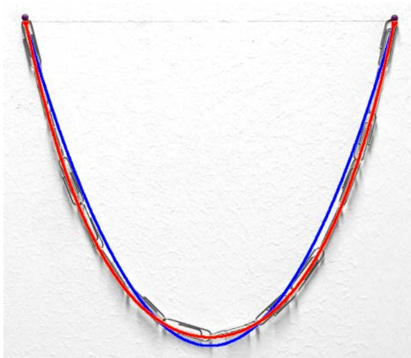

Figura 4: Curva catenaria de 16 clips. Se perciben aún los clips detrás de la catenaria ideal (rojo) y la parábola (azul) .

La curva catenaria bien puede realizarse con una cantidad suficiente de clips. Cuando se toman unos pocos clips, influyen todavía la longitud y la conexión entre los clips. En la figura 4 están representadas la curva catenaria ideal y una parábola de igual longitud encima de una cadena formada con 16 clips. Se reconoce claramente que la curva catenaria coincide con la cadena de clips, mientras que no así la parábola. La diferencia entre la curva catenaria y la parábola es particularmente notoria en una flecha pronunciada como es el caso en la figura 4.

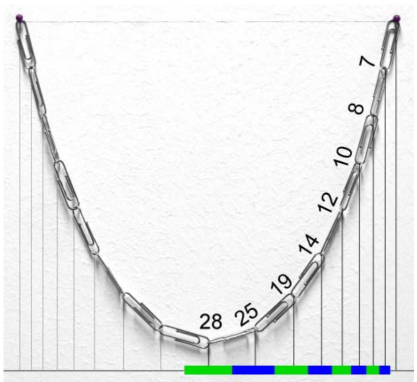

Figura.5: Construcción de un puente colgante. Los números representan la distancia de los cables portantes medida en milímetros.

Si en cada uno de los eslabones de una cadena cuelga un peso grande, comparado con el peso de un eslabón, como en el caso de un puente colgante, entonces la curva catenaria se modifica efectivamente en una parábola (véase información 2). Esto también se puede realizar con clips. Aunque la posibilidad que se describe a continuación no sea matemáticamente del todo exacta, ya el primer intento conduce sin embargo a un muy buen resultado en la realidad. Se cuelga la cadena de clips apoyándola sobre una hoja de papel, en él se marcan los puntos de unión de los clips y luego se trazan perpendiculares hacia abajo. En la figura 5 puede vérselo con la cadena de clips que figura en la figura 4 . Una línea horizontal representa la carga colgante (= vía colgante) que soporta el cable principal del puente colgante. El punto de mayor profundidad del segmento colgante del vía colgante (en verde) es simultáneamente la parte de mayor tamaño y, por ende, también la más pesada. Va desde la mitad de los clips izquierdos hasta la mitad de los clips derechos. En este punto de máxima profundidad se cuelgan, por ejemplo, tantos clips como los que suma la longitud del segmento de vía colgante en la hoja de papel, medida en milímetros. El segmento siguiente de vía colgante (en azul) es más corto. En esta unión se cuelgan asimismo tantos clips como milímetros tiene la longitud etc. De esta manera, en cada una de las uniones cuelga el peso correspondiente. En la figura 5, los números que se ven en la cadena representan los milímetros obtenidos de ese modo.

Cerca de los extremos de la cadena cuelgan ahora pocos clips. La relación del peso de los clips colgantes respecto al peso del cable principal es aquí de 3 a 1 aproximadamente. En el punto más bajo, la relación de peso es aproximadamente de 20 a 1. Esta modificación de las relaciones de peso se debe a nuestra construcción, en la cual las distancias de los cables portantes son iguales a lo largo del cable principal. En el caso de los puentes colgantes reales, se mantiene igual la distancia horizontal de los cables portantes. En este caso, esta relación - constante - que tienen los pesos entre sí, es de aproximadamente 10 a 1 hasta 15 a 1. Como no existe un cable principal ideal sin masa, la forma que adopta la curva del cable principal real de un puente colgante representa siempre una mezcla entre una curva catenaria y una parábola. Esto, en la realidad, no significa un problema para los constructores debido al hecho de que, con una comba reducida, es prácticamente irrelevante la diferencia entre parábola y curva catenaria.

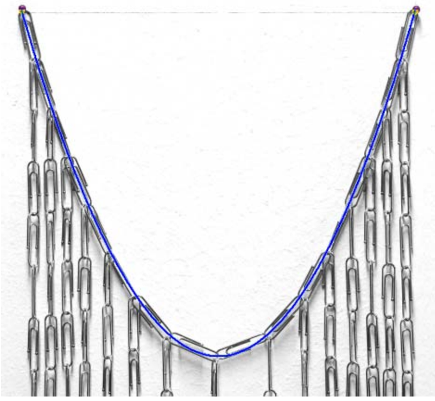

Figura 6: Parábola de 16 clips con pesos. Por razones gráficas no se muestran las cadenas largas de los clips colgantes en su totalidad.
Se colocó encima una parábola ideal (en azul).

En la figura 6 se puede ver una muy buena coincidencia con una parábola ideal (en azul).

Los programas de simulación como Interactive Physics [5] o XYZet [6] ofrecen también una resolución gráfica muy buena de lo que se describe. La figura 7 muestra una cadena simulada de 16 eslabones sin pesos (catenaria gruesa y roja), superpuesta a un ‘puente colgante’ con los correspondientes pesos (parábola gruesa, azul) y a una parábola ideal (línea fina, verde).

Cuando se buscan en la WEB los conceptos de curva catenaria, catenoide, se encuentran muchas referencias tanto de carácter histórico como también deducciones. Además aparecen también muchos Applets muy instructivos que ilustran la diferencia entre una curva catenaria y la parábola.

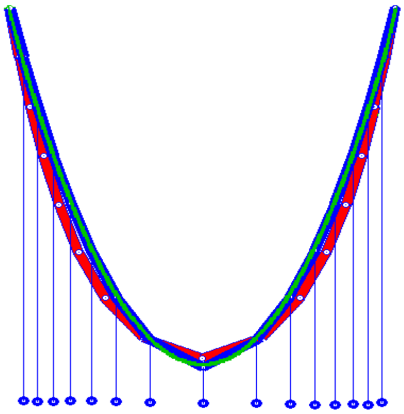

Figura 7: Simulación de una curva catenaria y una parábola trazada en Interactive Physics

Información 1 (Trompos de clips)

En la figura 8 se puede ver el trompo desde arriba.
Si el ángulo entre los radios es demasiado pequeño o demasiado grande, el total del centro de gravedad no coincide con el centro del círculo. Para poder calcular el ángulo correcto basta considerar el centro de gravedad de los dos radios y del arco del círculo opuesto designado con *s*. Las partes del arco del círculo (marcadas en rojo) son simétricas con el centro del círculo y por eso no necesitan ser consideradas. Facilita el cálculo introducir la mitad del ángulo α entre los radios.

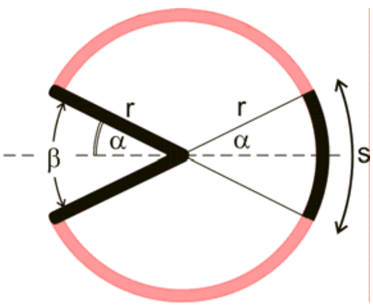

Figura 8: La trompo desde arriba

En la figura 9 sólo están dibujados los radios y el arco del círculo. El centro del círculo sería entonces el punto cero del sistema de coordenadas. La distancia del centro de gravedad del arco del círculo (marcado en azul) desde el punto cero sería x_1. Si el largo del arco del círculo corresponde a *s* y debido a la simetría con la abscisa, calcúlese el centro de gravedad con el cálculo integral.

$$x_1 = \frac{\int xds}{s} = \frac{1}{s}\int_{-\alpha}^{\alpha} r\cdot\cos\varphi\cdot r\cdot d\varphi = \frac{2\cdot r^2}{s}\sin\alpha$$

Si ρ es la densidad del alambre y A el corte transversal del alambre, entonces la masa del arco del círculo es $m_1 = s\cdot\rho\cdot A$. Con relación al punto cero, el arco del círculo genera un momento $M_1 = m_1\cdot x_1 = 2\cdot r^2\cdot\sin\alpha\cdot\rho\cdot A$.

El centro de gravedad de los radios está en $x_2 = r/2\cdot\cos\alpha$, la masa es $m_2 = 2\cdot r\cdot\rho\cdot A$. El momento generado por los radios en relación con el punto cero es $M_2 = m_2\cdot x_2 = r^2\cdot\cos\alpha\cdot\rho\cdot A$.

En la equiparación de ambos momentos se obtiene $\tan\alpha = 0.5$, es decir $\alpha = 26.565°$. El ángulo entre los radios es entonces $\beta = 2\alpha = 53.13°$.

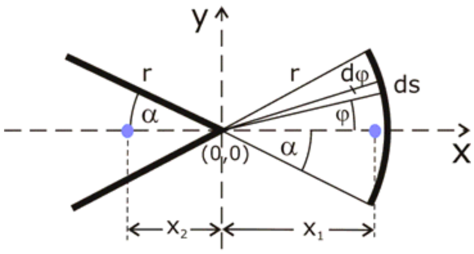

Figura 9: Para calcular el centro de gravedad se necesita considerar solamente los radios y el arco del círculo opuesto.

Información 2 (Parábola en el puente colgante)

La forma de la curva de los cables portantes en puentes colgantes se deduce de manera muy simplificada e idealizada a continuación.

En el cable portante de un puente colgante hay un punto P en el que actúan tres fuerzas, cuya suma vectorial precisamente debe suprimirlas (figura 10). En primer lugar está la fuerza G del segmento del vía colgante que actúa perpendicular hacia abajo y corresponde al peso de esa longitud x. En segundo lugar, la tensión del cable ejerce una fuerza horizontal S. Ésta es constante a todo lo largo del cable. En tercer lugar actúa una fuerza F en dirección a la tangente del cable. Esta fuerza tangencial corresponde precisamente a la pendiente en el punto P.

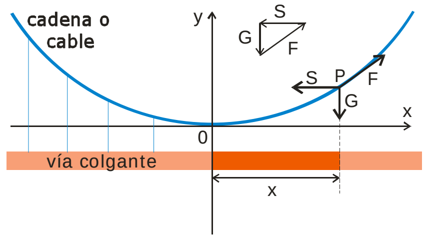

Figura 10: En un puente colgante, la forma de la curva que resulta para el cable portante es una parábola.

Sea entonces μ el peso por unidad de longitud del vía colgante que cuelga en el cable. El origen de las coordenadas 0 está en el nadir de la curva. Entonces el peso G que se ejerce en el punto P es igual a μx. Si denominamos y a la altura del cable en el punto x, entonces la inclinación en este punto es

$$y' = \frac{G}{S} = \frac{\mu\cdot x}{S}$$

De esto, mediante integración obtenemos

$$y = \int\frac{\mu\cdot x}{S}dx = \frac{\mu}{2S}x^2 + C$$

Dado que el origen de las coordenadas 0 está en el mínimo de la curva, la constante de integración C debe ser igual a cero. Con esto, la forma de la curva resulta una simple parábola.

Dr. Christian ***Ucke****, Universidad Técnica de Munich, Facultad de Física, Boltzmannstr. 3, 85748 Garching, Alemania.* ucke@mytum.de