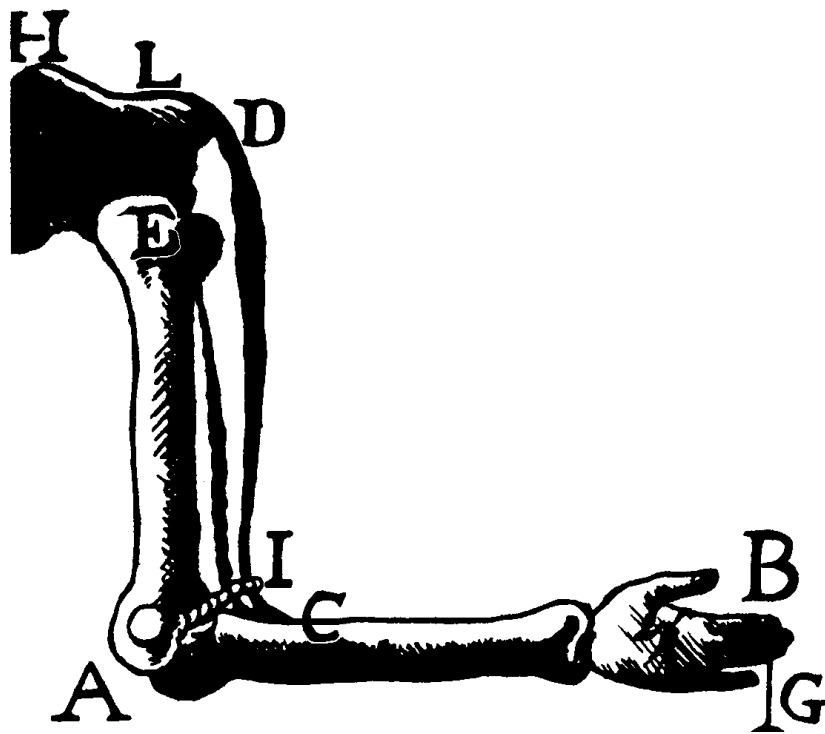


ARMMODELL



ARMMODELL

Dieser Versuch ist physikalisch auch noch sehr einfach; er wendet das Hebelgesetz auf ein Modell des menschlichen Armes an.

Ziel des Versuches ist es, die Vorgehensweise beim Durchführen eines Experiments, die Sie im vorigen Versuch kennengelernt haben, vertieft und in einem selbstständigerem Maß zu üben.

1 Grundlagen des Versuches

1.1 Einführung

Die Bewegung des Armes beruht auf dem Zusammenspiel von Knochen, Gelenken, Muskeln und Nervensystem. Die Muskeln bewegen "auf Befehl des Nervensystems" die durch Gelenke beweglich verbundenen Knochen. Das Hebelgesetz aus der Physik lässt sich darauf anwenden und gestattet einige quantitative Aussagen.

Das menschliche Skelett weist etwa 200 Knochenhebel auf. Der Arm stellt dabei noch ein physikalisch relativ übersichtliches System dar; andere Hebel sind wesentlich komplizierter (z.B. Mittelohr, Kniegelenk).

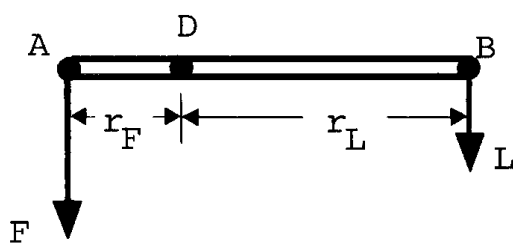


Abb.1: Benennungen beim Hebel

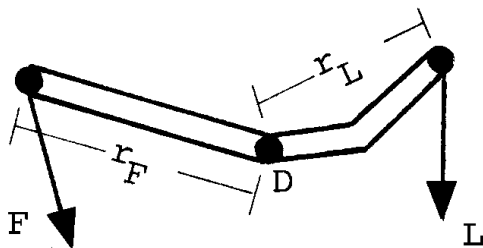


Abb.2: Schiefwinkliger Hebel

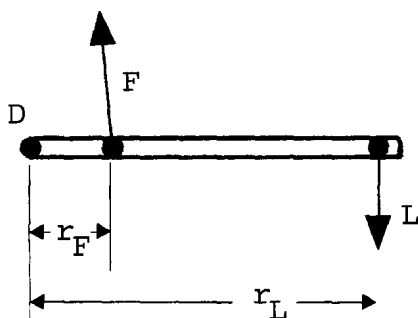


Abb.3: Einarmiger Hebel

1.2 Aufbau und Eigenschaften des Hebels

Im einfachsten Fall verfügt ein Hebel über einen festen Drehpunkt D, durch den eine feste Drehachse verläuft, einen Angriffspunkt A für die Kraft F, und einen Angriffspunkt B für die ihr entgegenwirkende Last L.

Als Hebelarm bezeichnet man die gradlinige Verbindung von Drehachse D zum Angriffspunkt A der Kraft bzw. B der Last. Die Drehachse steht senkrecht auf beiden Hebelarmen. Die Verbindungsstrecke von Drehachse zum Angriffspunkt A der Kraft nennt man Kraftarm (r_F), entsprechend heißt die Verbindungsstrecke Drehachse-Last der Lastarm (r_L).

Die beiden Hebelarme brauchen nicht die gleiche Richtung zu besitzen. Ebensovienig müssen die Richtungen der Kräfte und der zugehörigen Hebelarme senkrecht aufeinander stehen (Abb.2).

Im Fall von Abb.1 und Abb.2 spricht man von zweiarmigen Hebeln, da Kraft und Last auf verschiedenen Seiten des Drehpunktes angreifen. Vom einarmigen Hebel spricht man, wenn Last und Kraft auf derselben Seite von D angreifen (Abb.3).

ARM

1.3 Der menschliche Arm als Hebel

Um zu überschaubaren Verhältnissen zu kommen, muß man selbst bei dem an sich noch relativ übersichtlich angeordneten und angreifenden Muskeln des menschlichen Arms eine Reihe von Vereinfachungen machen. Wir gehen davon aus, daß beim Heben einer Last L mit angewinkeltem Arm (Abb.4a) nur der sog. zweiköpfige Armmuskel (musculus biceps brachii, kurz Bizeps) wirksam ist. Weitere Muskeln (m. brachialis, m. brachioradialis...) vernachlässigen wir. Die Angriffspunkte der Muskeln und die Drehpunkte der Gelenke seien jeweils punktförmig.

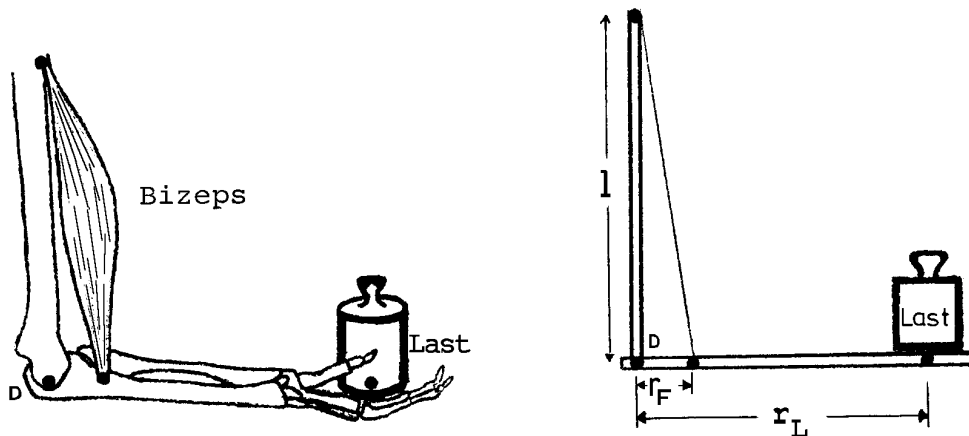


Abb.4a,b: Der menschliche Arm als Hebel

Wir haben es dann mit einem einarmigen Hebel zu tun, der schematisiert in Abb.4b dargestellt ist. Durchschnittsangaben für Kraft- bzw. Lastarm sind $r_F = 2,9\text{cm}$ und $r_L = 33,7\text{cm}$; die Oberarmlänge l beträgt ca. $l = 29\text{cm}$.

Diese Angaben können nicht direkt auf das im Versuch verwendete Modell übertragen werden.

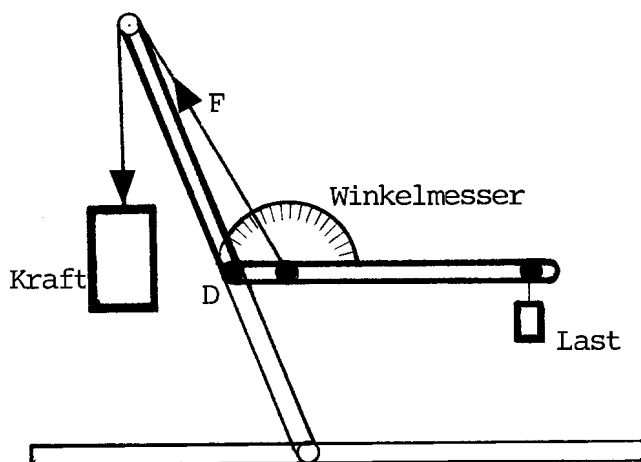


Abb.5: Modell des menschlichen Armes

1.4 Realisierung des menschlichen Arms als Hebel im Modell

Das Modell des menschlichen Arms besteht aus Aluminiumprofilen, wobei der Unterarm und Oberarm drehbar gelagert sind, um verschiedene Beugewinkel des Arms zu ermöglichen (Abb. 5). Der Winkel kann auf dem oberen Winkelmesser abgelesen werden. Der Oberarm ist im Modell verlängert und auf einem Ständer befestigt.

Der Biceps wird durch einen Seilzug dargestellt. Über eine bzw. zwei Umlenkrollen sind Gewichte einzuhängen, die die Muskelkraft simulieren.

Am Ende des Unterarms - sozusagen in der Hand - ist ein Gewicht angebracht, das die zu hebende Last darstellt. In Abb.5b ist das Modell schematisch wiedergegeben; die Maße des Modells entsprechen etwa den angegebenen Durchschnittswerten.

1.5 Das Hebelgesetz

Üblicherweise ist als Hebelgesetz die Gleichung Kraft mal Kraftarm = Last mal Lastarm bekannt. Als Formel

$$F \cdot r_F = L \cdot r_L$$

Mit dieser Gleichung wird aber nur ein spezieller Fall erfaßt, daß nämlich die Kräfte senkrecht zu den Hebelarmen angreifen (vgl. Abb.6).

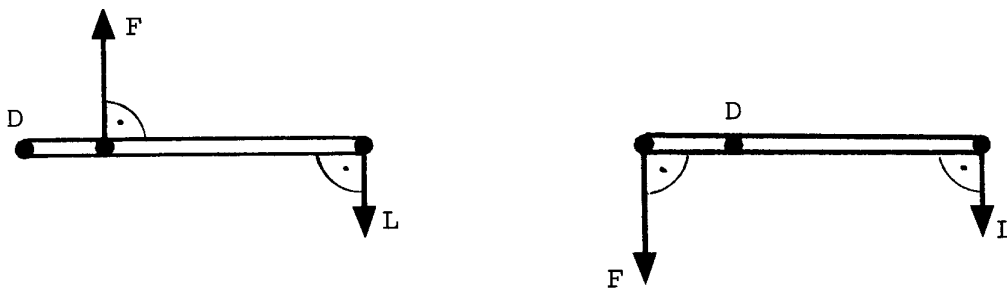


Abb.6a,b: Senkrecht zu den Hebelarmen angreifende Kräfte beim einarmigen bzw. zweiarmigen Hebel.

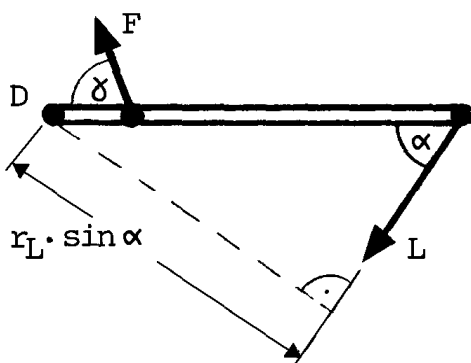


Abb.7: Schiefwinklig angreifende Kräfte beim einarmigen Hebel

Beim Armmodell dieses Versuchs greift die Kraft aber keineswegs immer senkrecht an. Im allgemeinen muß man sogar davon ausgehen, daß Kraft und Kraftarm bzw. Last und Lastarm einen schiefen Winkel miteinander bilden. Nehmen wir den Fall des einarmigen Hebels (Abb.7):

Als effektiver Hebelarm muß der kleinste Abstand der wirkenden Kraft von der Drehachse genommen werden. Der kleinste Abstand ist die Strecke, die senkrecht auf der wirkenden Kraft steht und durch die Drehachse geht. Mathematisch ergibt sich:

ARM

$$\begin{aligned} \text{für den effektiven Kraftarm} \quad r_{F_o} &= r_F \cdot \sin \gamma \\ \text{für den effektiven Lastarm} \quad r_{L_o} &= r_L \cdot \sin \alpha \end{aligned}$$

Das Hebelgesetz lautet damit:

$$F \cdot r_{F_o} = F \cdot r_F \cdot \sin \gamma = L \cdot r_L \cdot \sin \alpha = L \cdot r_{L_o}$$

Das Produkt aus Kraft und effektivem Kraftarm nennt man auch Drehmoment T_F

$$T_F = F \cdot r_F \cdot \sin \gamma$$

Definiert man analog das Drehmoment $T_L = L \cdot r_L \cdot \sin \alpha$, so lautet das Hebelgesetz einfach:

$$T_F = T_L$$

Die Beträge der beiden Drehmomente müssen im Gleichgewichtsfall übereinstimmen!

Anmerkung: Schreibt man \vec{F} und \vec{r}_F als Vektoren, dann ist das Drehmoment gerade das genannte Vektorprodukt aus beiden:

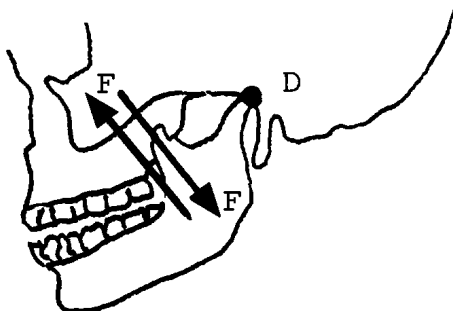
$$|\vec{T}_F| = |\vec{F} \times \vec{r}_F| = |\vec{F}| \cdot |\vec{r}_F| \cdot \sin \gamma$$

Die Anwendung des Hebelgesetzes erlaubt es z.B., mit kleinen Kräften große Lasten zu bewegen. Dies haben angeblich auch schon die Ägypter beim Bau der Pyramiden ausgenutzt. Man muß dazu nur den Kraftarm lang und den Lastarm kurz halten.

Beim menschlichen Arm ist es aber gerade umgekehrt (vgl. Abb.4a). Wir haben einen kurzen Kraftarm und einen langen Lastarm. Dies bedeutet beim Heben auch nur kleiner Lasten einen großen Kraftaufwand.

Der Grund für das ungünstige Verhältnis von Kraft- und Lastarm beim menschlichen Arm liegt in der damit erreichbaren großen Beweglichkeit.

Andere Hebel beim menschlichen Körper sind, vom physikalischen her gesehen, günstiger aufgebaut. Der menschliche Kiefer z.B. soll verhältnismäßig große Kräfte beim Kauen entwickeln können.



Die Kräfte von Ober- und Unterkiefer greifen so an, daß die Hebelarme etwa gleich groß sind. Im Bereich der Backenzähne werden die größten Kaukräfte wirksam (vgl. Abb.8).

Abb.8: Der menschliche Kiefer als Hebel

1.6 Stabile und labile Zustände des Modellarms

Beim Modell des Arms treten bei gewissen Winkeln stabile bzw. labile Lagen auf. In Wirklichkeit merken wir nichts davon, weil der Arm durch entsprechende regelnde Nervenimpulse in der gerade gewünschten Lage stabil gehalten werden kann.

Im folgenden werden einige qualitative Betrachtungen zur Stabilität des Armhebels durchgeführt. Eine genauere Berechnung übersteigt den Rahmen dieser Anleitung.

1.6.1 Stabile Lage

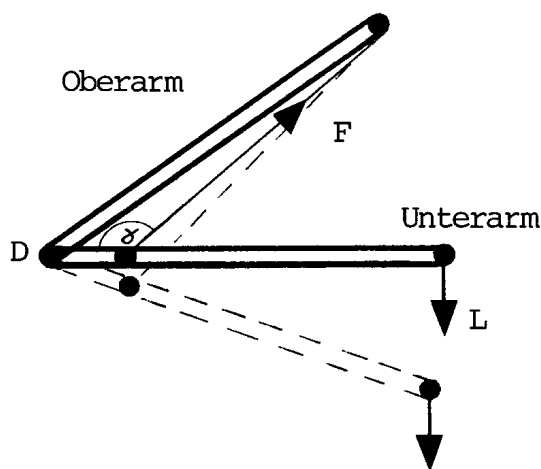


Abb.9: Stabile Lage beim Modellarm

In der gezeichneten Position des Arms als Hebel herrsche Gleichgewicht (ausgezogene Linien in Abb.9). Kraft und Kraftarm bzw. Last und Lastarm seien gerade entsprechend dimensioniert. Drückt man nun etwas auf den Unterarm und lenkt ihn damit etwas aus (gestrichelt angedeutet), so verkürzt sich der effektive Lastarm ein wenig; die Last bleibe konstant.

Der effektive Kraftarm verändert sich ebenfalls, er wird länger. Bei konstant bleibender Kraft wird sich der Unterarm also in die ursprüngliche Position zurückbewegen, wenn man den Unterarm wieder losläßt.

Ähnliche Überlegungen kann man anstellen, wenn der Unterarm etwas nach oben ausge-lenkt wird; er wird ebenfalls wieder in die ursprüngliche Position zurückgehen. Man sagt insgesamt, daß die Position des Unterarms in dieser Lage stabil ist.

Genauere Überlegungen zeigen, daß der Unterarm stabil ist für alle Winkel γ größer als 90° (γ ist der Winkel zwischen angreifendem Muskel und Unterarm).

1.6.2 Labile Lage

Lenkt man den Unterarm in der gezeichneten Position (Abb. 10) etwas nach unten aus, wird der effektive Lastarm etwas kürzer. Der effektive Kraftarm wird auch kürzer, aber im Verhältnis zur Änderung des Lastarms noch stärker (das liegt an der Nichtlinearität des Sinus; der Unterschied von $\sin 90^\circ$ zu $\sin 80^\circ$ ist kleiner als der Unterschied von $\sin 50^\circ$ zu $\sin 40^\circ$).

ARM

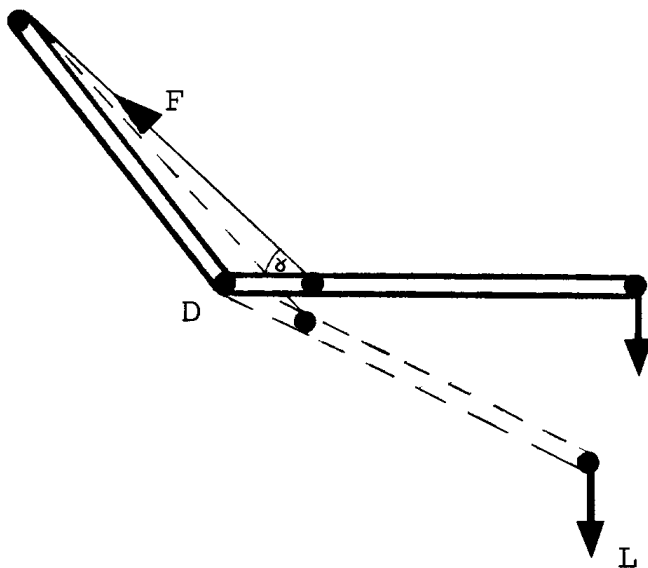


Abb.10: Labile Lage des Unterarmes

Für Winkel etwa gleich 90° herrscht indifferentes Gleichgewicht. Bei einer kleinen Auslenkung nach oben oder unten wird der Arm in seiner Position verharren.

Die - gleichbleibende - Kraft reicht nun nicht mehr aus, den Unterarm zu halten: er wird nach unten fallen.

Ähnliche Überlegungen gelten, wenn der Unterarm etwas nach oben ausgelenkt wird. In diesem Fall wird der Kraftarm länger und der Arm wird nach oben schnellen.

Diese Position des Unterarms wird als labil bzw. instabil bezeichnet. Für alle Winkel kleiner als 90° ist in diesem Sinne Labilität vorhanden.

2 Versuchsaufbau

Das Modell des Arms ist bereits in Abb.5 abgebildet. Am Unterarm ist schon eine Last (kleines Messinggewicht) angebracht. Mit einer Federwaage (bis 2 N) kann das Gewicht der wirksamen Last bestimmt werden.

Eine Wasserwaage ermöglicht das Waagrechtstellen des Unterarms.



Abb.11: Bestimmung der mit dem eigenen Unterarm erzielbaren Kraft

Die Muskelkraft wird mit Gewichten, die an den Seilzug einhängbar sind, simuliert (Gewichte: 0,2; 0,5; 1,0; 2,0 "kg" ("kg" steht in Anführungszeichen, weil kg keine Einheit für Gewicht darstellt, aber diese Einheit auf den Gewichten bzw. Federwaage vermerkt ist).

Der Winkel zwischen Seilzug und Unterarm ist an einem Winkelmesser ablesbar.

Eine weitere mittels einer Schraubzwinde am Tisch zu befestigende und mit einem Haltegriff versehene Federwaage (max. 25 bzw. 50 "kg") dient dazu, Messungen mit dem eigenen Arm durchführen zu können (Kraftmesserei erwünscht; siehe Abb.11).

3 Aufgabenstellung und Versuchdurchführung

3.1 Vermerken Sie die Modellnummer im Protokoll. Notieren Sie mögliche Fehlerquellen gleich während der Messungen!

3.2 Bestimmen Sie mit einem Lineal oder Meterstab die Hebellängen r_F und r_L .
Wie groß ist die Meßunsicherheit?

3.3 Bestimmen Sie mit einer Federwaage die mit dem Unterarm und dem Gewicht zusammen wirkende Last.

Nullpunkt der Federwaage vorher justieren.

Hängen Sie dazu die Federwaage in den am Ende des Unterarms angebrachten Haken ein und messen die wirkende Kraft bei waagerechtem Unterarm. Eine kleine Wasserwaage befindet sich auf dem Unterarm.

Unterarm nicht abschrauben!

3.4 Bestimmen Sie in Abhängigkeit vom Winkel γ zwischen Seilzug und waagerechtem Unterarm die jeweils für das Gleichgewicht notwendige Kraft F .

Hierzu müssen Sie den Oberarm feststellen und in die Schlaufen des Seilzugs Gewichte einhängen. Die Gewichte müssen sorgfältig eingehängt werden, sodaß sie nicht auf Ihre Füße o.ä. fallen.

Achten Sie bei der labilen Position des Unterarms ($\gamma < 90^\circ$) besonders darauf, daß er nicht nach oben oder unten ausschlägt.

Bei Winkeln γ größer als 80° müssen Sie den Seilzug über die zweite Umlenkrolle laufen lassen, aber auch bei Winkel γ kleiner als 80° können Sie immer beide Umlenkrollen benutzen.

Für **mindestens fünfzehn Winkel** in vernünftigen Abständen sollen Sie Meßwerte aufnehmen.

Empfehlung: Wie beim Versuch BOY spielt auch hier die Reibung eine Rolle. Mit folgender Meßmethodik kann man die Reibung erfassen: Hängen Sie zunächst zuwenig Gewichte für den Gleichgewichtsfall an den Seilzug. Unterstützen Sie den Unterarm in der waagerechten Position von unten (mit der Hand oder einem geeigneten Aufbau) und hängen so lange Gewichte am Seilzug dazu, bis der Unterarm nach oben ausgelenkt wird. (Achtung: Schaumgummi zum Schutz der oberen Umlenkrolle muß vorhanden sein). Dieser Gewichtswert entspricht einer oberen Grenze der notwendigen Kraft. Nunmehr drücken Sie den Unterarm mit der Hand von oben in die waagerechte Position und hängen solange Gewichte vom Seilzug ab, bis sich der Unterarm nach unten bewegt bzw. fällt. Dieser Gewichtswert entspricht einer unteren Grenze der notwendigen Kraft.

Diese Meßmethodik läßt sich sowohl bei der stabilen als auch bei der labilen Lage anwenden.

3.5 Messen Sie mit Hilfe der am Tisch festschraubbaren Federwaage bei möglichst senkrechtem Oberarmmuskel und waagerechtem Unterarm Ihre eigene maximal wirksame Kraft (siehe Abb.11).

ARM

4 Versuchsauswertung

4.1 Theoretische Kurve (so genannt, weil hier Meßwerte zusammen mit der Formel des Hebelgesetzes die Kurve ergeben).

Berechnen Sie die für den Gleichgewichtsfall notwendige Kraft $F=F(\gamma)$ ($30^\circ \leq \gamma \leq 150^\circ$; F in Newton) in Abhängigkeit vom Winkel γ aus den gemessenen Werten von r_F und r_L und der insgesamt wirkenden Last L .

Führen Sie für einige ausgewählte Winkel γ eine Fehlerabschätzung für die Kraft F durch (γ hat hier keinen Fehler!!).

Tragen Sie in Millimeterpapier die errechneten Werte F (inklusive der errechneten Fehlerabschätzungen) als Funktion von γ ein und zeichnen Sie eine glatte Kurve (theoretische Kurve) durch Ihre Werte.

4.2 Praktische Kurve (so genannt, weil nur Meßwerte eingetragen werden).

Rechnen Sie die in Punkt 3.4 der Versuchsdurchführung in kg bestimmten Gewichte in Newton (N) um und tragen Sie die Werte in Abhängigkeit vom Winkel γ in das Millimeterpapier mit der theoretischen Kurve ein. Verbinden Sie für jeden Winkel den oberen mit dem unteren Wert (Fehlerbalken).

Ein Mittelwert aus oberem und unterem Wert soll nicht errechnet und auch nicht ins Millimeterpapier eingetragen werden (anders als beim Versuch BOY!).

Sie erhalten hier zwei Grenzkurven, die gewissermaßen ein Band möglicher Werte einschließen.

4.3 Diskutieren Sie die Übereinstimmung von theoretischer und praktischer Kurve.

Insbesondere: Liegt die theoretische Kurve ganz oder nur teilweise innerhalb der praktischen Grenzen? Falls nicht, bei welchen Winkeln nicht? Gibt es 'Ausreißer' und wo? Kann man sie erklären?

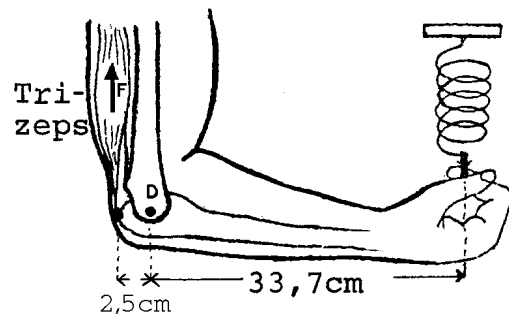
4.4 Unter der Annahme, daß Ihr eigener Arm die gleichen Abmessungen wie der Modellarm hat, bestimmen Sie aus Punkt 5) der Versuchsdurchführung die maximal wirkende Kraft Ihrer Oberarmmuskeln (Bizeps).

Diskutieren Sie den Realitätsgrad dieser Betrachtung.

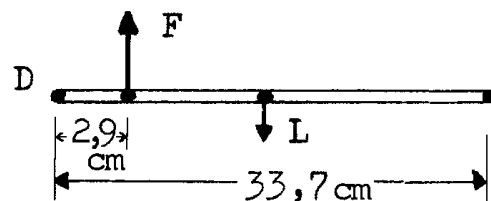
5 Aufgaben

- 1) Der menschliche Kiefermuskel kann Kräfte bis zu 10^4N (bzw. ca. 1000kg) entwickeln.
 - a) Wie groß ist die im Bereich der Backenzähne wirksame Kraft, wenn Kraftarm und Lastarm beide ca. 5cm groß sind?
 - b) Wie groß ist die maximal wirkende Kraft im Bereich der vorderen Schneidezähne, wenn dort der Lastarm ca. 10cm beträgt?
 - c) Was lässt sich über den Kaudruck (Verhältnis von Kaukraft zu wirksamer Zahnfläche) bei den Backen- bzw. Schneidezähnen aussagen?
- 2) Zeichnen Sie einen zweiarmigen Hebel mit schiefwinklig angreifenden Kräften, benennen Sie die vorkommenden Winkel und Strecken und formulieren Sie für ihn das Hebelgesetz.
- 3) Wie würden sich schwergängige Kugellager bei den Umlenkrollen des Armmodells auf die Messungen auswirken?

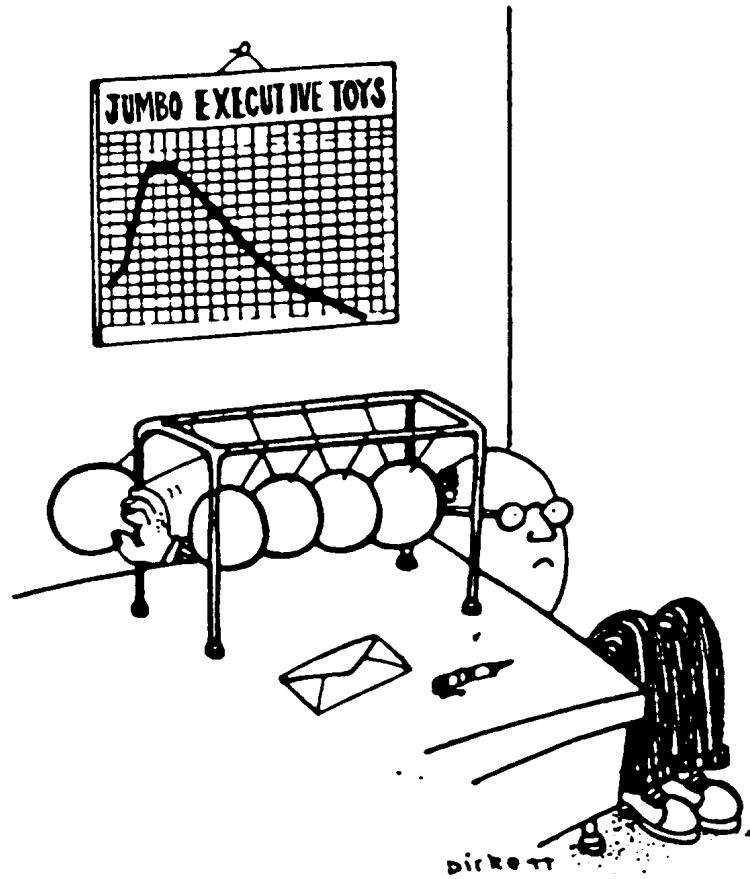
- 4) Zieht man mit dem ungefähr senkrecht angewinkelten Unterarm eine Feder nach unten (siehe Abbildung), benötigt man den Trizeps (auch Strecker genannt). Welche Kraft zieht an der Feder nach unten (in kg und N), wenn der Trizeps eine "Kraft" von 20kg entwickelt?



- 5) Gegeben sei das Modell des menschlichen Arms mit den angegebenen Maßen (siehe Abbildung). Kraft und Last greifen senkrecht an; die Masse des Unterarms mit Hand sei homogen verteilt und betrage $m = 1,5\text{kg}$.



- a) Welche Kraft ist notwendig, um den Arm im Gleichgewicht zu halten?
- b) Tragen Sie in eine Zeichnung die für den Gleichgewichtsfall notwendige Kraft F als Funktion des Kraftarms r_F ein ($0,2\text{cm} < r_F < 5\text{cm}$).



With acknowledgement and thanks to Peter Hopkinson,
Vancouver, B.C. Canada.