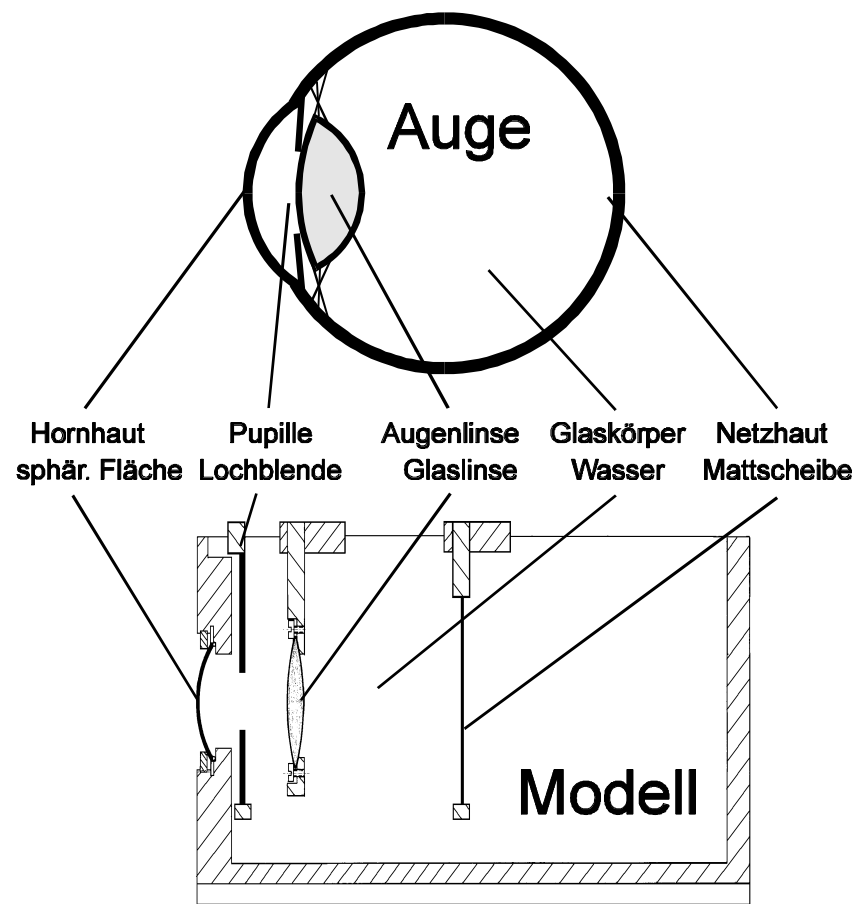


# AUGENMODELL



## AUGENMODELL

Dieser Versuch dient dazu, einige einfache Formeln der geometrischen Optik auf das Modell eines Auges und das Auge selbst anzuwenden. Beim Auge lassen sich in besonders anschaulicher Weise einfache physikalische Formeln für ein ziemlich weitgehendes quantitatives Verständnis der Abbildungsvorgänge beim normal- und fehlsichtigen Auge sowie vieler optischer Funktionen des Auges einsetzen.

Auf die Grenzen der Anwendung der Physik in der Augenoptik und auf die in diesem Versuch vorgenommenen Vereinfachungen gegenüber der Wirklichkeit wird hingewiesen.



# 1 Grundlagen des Versuchs

## 1.1 Aufbau des menschlichen Auges und des Modells

Für die optische Abbildung beim menschlichen Auge sind wichtig (vgl. Abbildung auf Titelseite):

- a) die Hornhaut (lat. Cornea); sie stellt eine stark, annähernd kugelig (sphärisch) gekrümmte Fläche dar.
- b) die Augenlinse mit ebenfalls sphärisch gekrümmten Begrenzungsflächen; die Krümmungen sind veränderbar (Akkommodation der Linse).
- c) das Kammerwasser und der Glaskörper; beide bestehen zu mehr als 99% aus Wasser und beide sind wichtig für die optische Abbildung (was in vielen Lehrbüchern nicht erwähnt wird). Wären sie nicht da, würde sich die gesamte Abbildung verändern.
- d) die Pupille; sie stellt das Loch in der Iris des Auges dar. Sie dient der Regelung des Lichteinfalls ins Auge und beeinflusst u.a. die Tiefenschärfe.
- e) die Netzhaut (lat. Retina); auf ihr werden die Objekte abgebildet.

Bei dem unter dem Auge ebenfalls im Querschnitt abgebildeten Augenmodell sind die dem Auge entsprechenden für eine optische Abbildung notwendigen Teile vorhanden. Ein solches Modell wird im Praktikum verwendet.

Auf einige Vereinfachungen sei hier gleich hingewiesen:

- a) die sphärische Fläche des Modells ist exakt sphärisch und hat außen und innen etwa die gleiche Krümmung. In Wirklichkeit ist die Hornhaut vorne und hinten verschieden gekrümmt und darüberhinaus oft nicht sphärisch.
- b) das Kammerwasser und der Glaskörper werden durch Wasser ersetzt.
- c) die Linse des Modells ist normalerweise starr und besteht aus homogenem Glas; sie hat auf beiden Seiten etwa gleiche Krümmung und ist zur Netzhaut hin verschiebbar. In Wirklichkeit sind die Krümmungen der Linse vorne und hinten ziemlich unterschiedlich, oft auch nicht sphärisch. Ausserdem ist die Augenlinse nicht homogen; sie hat einen zwiebelartigen Schalenaufbau mit zum Kern hin zunehmender Brechzahl. Es gibt zum Modell auch eine in den Krümmungsradien kontinuierlich verstellbare Linse, die in ihrer optischen Qualität aber schlechter als die Glaslinse ist.
- d) die Mattscheibe des Modells ist eben und verschiebbar. Die Netzhaut des Auges ist gewölbt und in Wirklichkeit natürlich nicht verschiebbar.

Was die Qualität der Optik des Auges im Vergleich mit einem hochwertigen optischen Apparat anbetrifft, so hat dazu HELMHOLTZ im vorigen Jahrhundert festgestellt:

*"Wenn mir ein Optiker ein Instrument verkaufen wollte, welches solche Fehler hätte, so ist es nicht zuviel gesagt, daß ich mich vollkommen berechtigt glauben würde, die härtesten Ausdrücke über die Nachlässigkeit seiner Arbeit zu gebrauchen, und ihm sein Instrument mit Protest zurückzugeben."*

Daß wir scheinbar doch so scharf sehen, verdanken wir der komplizierten Struktur der Netzhaut; sie verarbeitet die optischen Informationen und macht aus mehr oder minder schlechten Bildern scharfe Eindrücke.

So schlecht, wie HELMHOLTZ die Optik des Auges beschreibt, ist sie aber auch nicht. Wie wichtig sie ist, bemerken wir insbesondere bei einer Fehlsichtigkeit, die dann mit Brillengläsern korrigiert werden kann.

## 1.2 Sphärische Fläche

Wir beginnen die Optik mit einem einfachen Fall, der auch in der Ophthalmologie eine Rolle spielt, nämlich einem Auge, dem die Linse entfernt ist (sog. aphakes Auge). Übrig bleiben Hornhaut, Kammerwasser und Glaskörper. Wir nehmen zur Vereinfachung weiter an, daß die Brechzahl von Hornhaut und Kammerwasser gleich sind (was in Wirklichkeit nicht ganz stimmt). Übrig bleibt die Hornhaut als sphärische Begrenzungsfläche zwischen zwei Medien (Luft und Kammerwasser) mit den Brechzahlen  $n_1$  und  $n_2$  (Abb.1a). Eine sphärische Fläche  $S$  wird durch den Krümmungsradius  $r$  charakterisiert (Abb.1b).

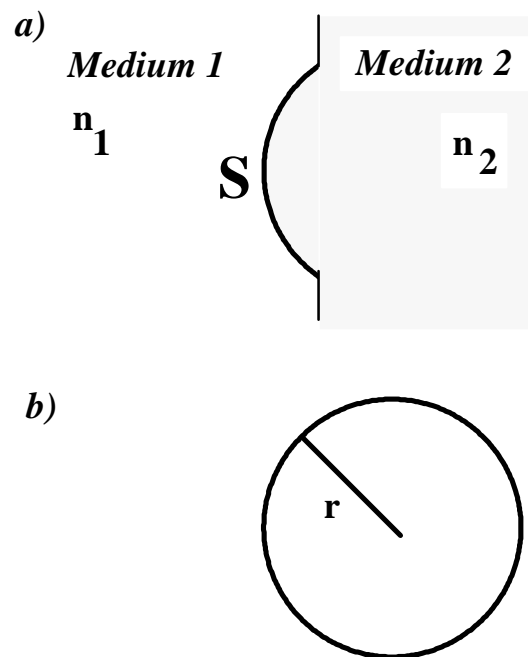


Abb.1a,b: Sphärische Fläche

Durch eine solche sphärisch begrenzte Fläche ist schon eine optische Abbildung möglich. Befindet sich ein Gegenstand (im Versuch das Testzeichen) im Abstand  $a$  (Gegenstandsweite) von der Grenzfläche (Flächenscheitel  $S$ ), so entsteht auf einem Schirm (Mattscheibe) in einem bestimmten Abstand  $b$  (Bildweite) ein scharfes Bild dieses Gegenstandes (vgl. Abb.2).

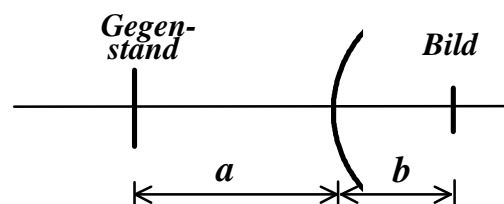


Abb.2: Zur Definition von Gegenstands- und Bildweite

Die Brechzahlen  $n_1$  und  $n_2$ , der Krümmungsradius  $r$  und die Gegenstands- bzw. Bildweite  $a$  bzw.  $b$  hängen gemäß folgender Formel zusammen:

$$\text{Formel (1)} \quad \frac{n_1}{a} + \frac{n_2}{b} = \frac{n_2 - n_1}{r}$$

Sind alle anderen Größen bekannt, kann man die Bildweite  $b$  berechnen. Wichtig ist dabei, alle Längenmaße in den gleichen Einheiten auszudrücken, z.B. in mm oder in m. Rückt man den Gegenstand immer weiter weg, so wird die Bildweite immer kleiner, aber nicht beliebig klein. Für  $a \rightarrow \infty$  gilt nämlich  $n_1/a \rightarrow 0$ , d.h. von Formel (1) bleibt übrig

$$\text{Formel (1a)} \quad \frac{n_2}{b} = \frac{n_2 - n_1}{r}$$

In den Abb. 3a bis c sind einige vom Testzeichen ausgehende und zur Bildentstehung beitragende Strahlen eingezeichnet.

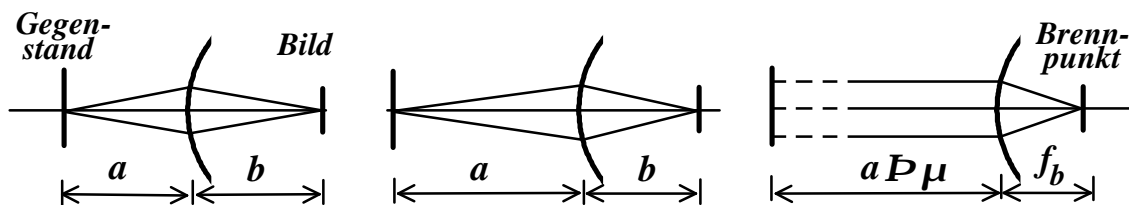


Abb.3a-c: Zur Definition des bildseitigen Brennpunktes und der Brennweite. Der Gegenstand wird immer weiter weggerückt, die Bildweite verkleinert sich nur bis zur Brennweite  $f_b$

Für  $a \rightarrow \infty$  werden die Strahlen parallel; man sagt dann, daß sie sich im bildseitigen Brennpunkt vereinigen. Statt von Bildweite spricht man dann von bildseitiger Brennweite  $f_b$ . Setzt man  $f_b$  ein, so ergibt sich umgeformt

$$\text{Formel (2)} \quad f_b = \frac{n_2}{n_2 - n_1} \cdot r$$

Den Ausdruck  $n_2/f_b$  nennt man den Brechwert  $D$  der sphärischen Fläche bzw. genauer Flächenbrechwert. Es gilt also:

$$\text{Formel (3)} \quad D = \frac{n_2}{f_b} = \frac{n_2 - n_1}{r}$$

Der Brechwert wird in der Einheit Dioptrien (Abk. dpt) angegeben. Gibt man die Brennweite  $f_b$  oder den Krümmungsradius  $r$  in Meter (m) an, so erhält man den Brechwert in Dioptrien.

## AUG

Die Formeln (1) bis (3) und auch die weiter hinter folgenden Formeln gelten hinreichend genau unter der Einschränkung, daß nur sog. achsnahe Strahlen betrachtet werden, d.h. Strahlen, die mit der optischen Achse keine größeren Winkel als ca.  $10^\circ$  bilden (Abb. 4)

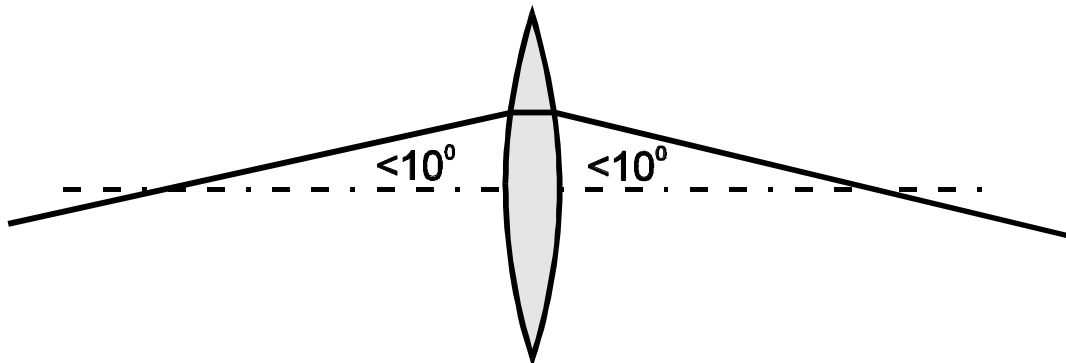
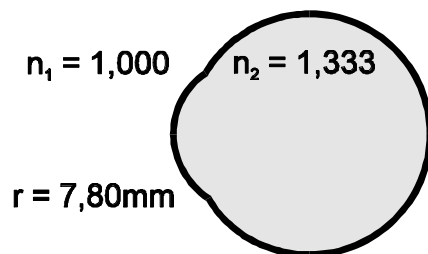


Abb.4: Die hier wiedergegebenen Formeln gelten nur für sogenannte achsnahe Strahlen, d.h. Strahlen, die die optische Achse unter Winkeln kleiner als ca.  $10^\circ$  schneiden.

Für größere Winkel stimmen die Formeln nur noch näherungsweise. Bei einer rechnerischen Ableitung, die wir hier aus Platzgründen nicht durchführen, ergäbe sich diese Einschränkung von selbst (siehe Lehrbuch).

**Anwendung:** Die Hornhaut des menschlichen Auges hat einen Krümmungsradius von  $r = 7,80\text{mm} = 0,0078\text{m}$ . Setzt man für  $n_2 = 1,333$  die Brechzahl des Wassers ein und für  $n_1 = 1,000$  (Brechzahl der Luft), so ergibt sich für das aphake Auge unter Berücksichtigung der schon früher erwähnten Vereinfachungen ein Brechwert von (Abb.5)

$$D_{\text{aphak}} = \frac{1,333 - 1,000}{0,0078\text{m}} = 42,7\text{dpt}$$



Für die bildseitige Brennweite  $f_b$  des aphaken Auges ergibt sich

Abb.5: Aphakes Auge

$$f_{b_{\text{aphak}}} = \frac{n_2}{D_{\text{aphak}}} = \frac{1,333}{42,7\text{dpt}} = 0,0312\text{m} = 31,2\text{mm}$$

Analog zur bildseitigen Brennweite definiert man eine objektseitige Brennweite  $f_o$  dadurch, daß in Formel (1) die Bildweite  $b$  gegen unendlich geht. Es ergibt sich:

$$\frac{n_1}{f_o} = \frac{n_2 - n_1}{r} \quad \text{bzw.} \quad f_o = \frac{n_1}{n_2 - n_1} \cdot r$$

d.h., die objektseitige Brennweite  $f_o$  ist verschieden von der bildseitigen Brennweite  $f_b$  ! Es gibt aber keinen Unterschied zwischen bildseitigem und objektseitigem Brechwert, denn es gilt:

$$D = \frac{n_2}{f_b} = \frac{n_1}{f_o}$$

Aus Formel (1) und (3) ergibt sich kombiniert:

$$\text{Formel (4)} \quad D = \frac{n_1}{a} + \frac{n_2}{b}$$

Aus Formel (3) kann man den Brechwert einer sphärischen Fläche bestimmen, indem man den Krümmungsradius  $r$  mißt, vorausgesetzt,  $n_1$  und  $n_2$  sind bekannt.

Mit Formel (4) haben wir eine weitere Möglichkeit zur Bestimmung des Brechwertes. Man bildet einen Gegenstand scharf ab und mißt die entsprechenden Gegenstands- und Bildweiten. Im Versuch soll auf beide Arten der Brechwert der sphärischen Fläche des Modells ermittelt werden. Auf diese Weise lassen sich zwei verschiedene Methoden in ihrer Genauigkeit vergleichen. Häufig werden auf diese Art systematische Fehler entdeckt.

### 1.3 Linsen

Von der sphärischen Fläche gehen wir zur Linse über. Eine Linse wird von zwei sphärischen Flächen mit den Krümmungsradien  $r_1$  und  $r_2$  begrenzt (Abb. 6). Bedeuten  $n_1$  die Brechzahl des Mediums vor der Linse,  $n_2$  die des Mediums hinter der Linse und  $n_L$  die Brechzahl des Linsenmaterials selbst, so gilt für die Linse folgende Abbildungsformel ( $a$  und  $b$  bedeuten wieder Gegenstands- und Bildweite). Vgl. Abb.7

$$\text{Formel (5)} \quad \frac{n_1}{a} + \frac{n_2}{b} = \frac{n_L - n_1}{r_1} + \frac{n_L - n_2}{r_2}$$

Diese Formel stellt eine Erweiterung der ursprünglichen Formel dar, nämlich  $n_L = n_2$ , so ergibt sich wieder Formel (1).

#### Einschränkung:

Formel (5) gilt nur für dünne Linsen. Genauer muß man sagen, für Linsen deren Dicke klein gegen ihre Brennweite ist. Wendet man die Formel auch in nicht zutreffenden Fällen an, so wird sie ungenau.

Aus Formel (5) ergibt sich die bildseitige Brennweite  $f_b$  wieder durch den Übergang  $a \rightarrow \infty$ :

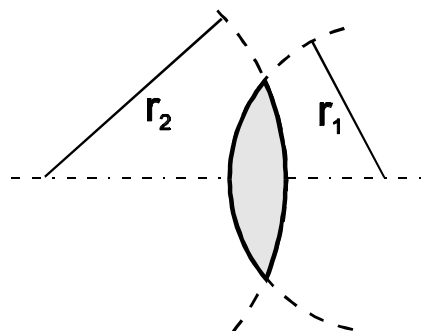


Abb.6: Krümmungsradien bei einer Linse

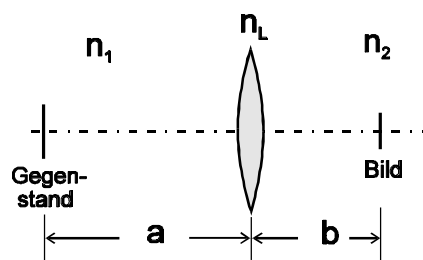


Abb.7: Bezeichnungen bei einer Linse

## AUG

Formel (6) 
$$\frac{n_2}{f_b} = \frac{n_L - n_1}{r_1} + \frac{n_L - n_2}{r_2}$$

Wenn sich vor und hinter der Linse das gleiche Medium befindet, d.h. also  $n_1 = n_2$ , so ergibt sich übrigens  $f_o = f_b$ . In diesem Fall sind also bildseitige und objektseitige Brennweite gleich; man spricht dann einfach von der Brennweite der Linse.

Für den Brechwert einer Linse ergibt sich wie oben:

Formel (7) 
$$D_L = \frac{n_2}{f_b} = \frac{n_L - n_1}{r_1} + \frac{n_L - n_2}{r_2} = \frac{n_1}{a} + \frac{n_2}{b}$$

Beachten Sie die Einschränkungen auch für diese Formeln!

Setzt man in Formel (7)  $n_1 = n_2$ , d.h. daß sich auf beiden Seiten der Linse das gleiche Medium befindet, so erhält man die bekannte Linsengleichung

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \quad \text{mit} \quad f = f_o = f_b$$

Diese Gleichung ist für die Optik von Säugetieren nur sehr bedingt verwendbar.

**Anwendung:** Für die Linse im menschlichen Auge gilt etwa:  $r_1 = 10,0\text{mm}$ ;  $r_2 = 6,0\text{mm}$ ;  $n_L = 1,41$ ;  $n_1 = n_2 = 1,333$ . Mit diesen Werten ergibt sich aus Formel (7) ein Brechwert von  $D = 20,5\text{dpt}$  und eine Brennweite von  $f = 65\text{mm}$ . Die Dicke der menschlichen Linse beträgt  $d = 3,6\text{mm}$  und ist damit tatsächlich ziemlich klein gegen die Brennweite, so daß die Anwendung der Formel (7) zulässig ist.

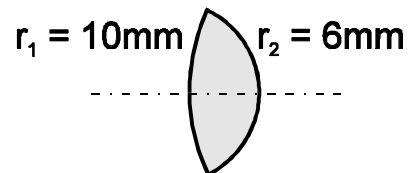


Abb.8: Form der Augenlinse

Setzt man

$$D_1 = \frac{n_L - n_1}{r_1} \quad \text{und} \quad D_2 = \frac{n_L - n_2}{r_2}$$

wobei  $D_1$  und  $D_2$  als **Flächenbrechwerte** bezeichnet werden, so ergibt sich aus Formel (7):

Formel (8) 
$$D_L = D_1 + D_2$$

d.h. der Brechwert einer Linse ist die Summe der Flächenbrechwerte.



## 1.4 Linsenformen

Linsen, die in der Mitte dicker sind als am Rand, heißen konvexe Linsen. In Luft sammeln konvexe Linsen das Licht. Man muß genau zwischen der Bezeichnung der Linsenformen und der Linsenwirkung unterscheiden. Konvex und konkav sind Bezeichnungen für Linsenformen; sammelnd bezieht sich auf die Linsenwirkung. Z.B. kann eine konvexe Linse aus Luft im Wasser einen parallelen Strahl zerstreuen. Die Unterscheidung zwischen Form und Wirkung wird in der Literatur häufig nicht gemacht. Die verschiedenen Linsenformen werden gemäß Abb.9 benannt:

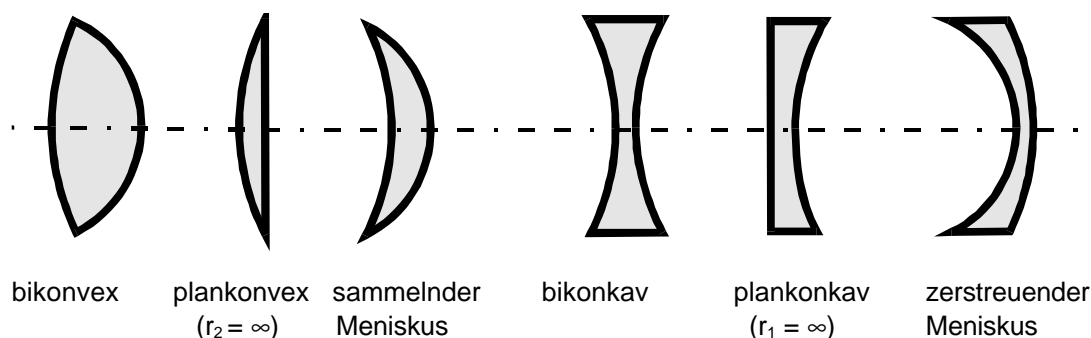


Abb.9: Benennung verschiedener Linsenformen

Linsen die in der Mitte dünner sind als am Rand heißen konkave Linsen. In Luft zerstreuen konkave Linsen einen parallelen Lichtstrahl. Die Brennweite zerstreuer Linsen wird durch rückwärtige Verlängerung der zerstreuten Strahlen ermittelt (Abb. 10); sie wird negativ gerechnet.

Entsprechend sind auch die Brechwerte von zerstreuen Linsen negativ.

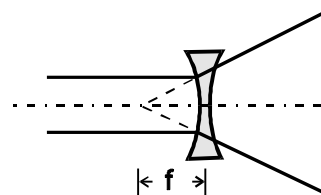


Abb.10: Ermittlung der Brennweite bei einer konkaven Linse

## 1.5 Linsenkombinationen

Setzt man zwei dünne Linsen mit den Brechwerten  $D_1$  und  $D_2$  eng zusammen, so gilt für den Gesamtbrechwert  $D_g$  der Kombination genau wie bei der Addition von Flächenbrechwerten:

$$\text{Formel (9)} \quad D_g = D_1 + D_2$$

Diese Formel gilt auch für die Kombination einer sphärischen Fläche und einer Linse, so wie es beim Auge mit Linse vorkommt.

Man beachte die beiden Einschränkungen für die Anwendung der Formel (9):

**Linsen eng zusammen**  
**Linsen beide dünn**

## AUG

Dünn bzw. eng heißt genauer: klein gegen die Brennweiten der Linse; zehnmal kleiner ist im allgemeinen ausreichend.

**Anwendung:** Wir berechnen mit Formel (9) den Gesamtbrechwert des menschlichen Auges (Abb.11).

$$D_g = D_L + D_{aphak} =$$

$$20,5 + 42,7 = 63,2 \text{dpt}$$

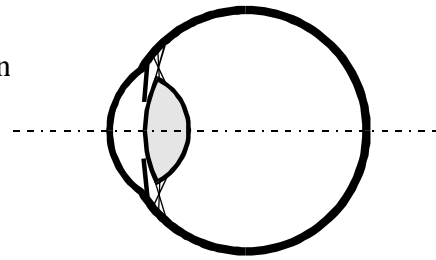


Abb.11: Auge im Querschnitt

Dieser Wert weicht schon um einige Dioptrien vom wahren Wert ab. Das liegt daran, daß die Einschränkungen eigentlich beachtet werden müßten. Läßt man Einschränkungen der Formel (9) fallen, daß nämlich die Linsen eng zusammen gesetzt sind, so ergibt sich für den Gesamtbrechwert dieser Kombination zweier dünner Linsen in einem Abstand von  $d$  (ausgedrückt in Meter)

Formel (10) 
$$D_g = D_1 + D_2 - \frac{d}{n} \cdot D_1 \cdot D_2$$

Hierbei bedeuten  $D_1$  und  $D_2$  die Einzelbrechwerte der dünnen Linsen (das Vorzeichen ist dabei besonders zu beachten) und  $n$  die Brechzahl des Mediums zwischen beiden Linsen .

Formel (10) wird häufig nach dem schwedischen Augenarzt Gullstrand als Gullstrandsche Formel benannt. Auf die Ableitung dieser Formel verzichten wir an dieser Stelle; Sie sollen sie anwenden können. Die Formel ist für die Optik von Augen sehr wichtig.

**Beispiel:** Nehmen Sie etwa zwei dünne Linsen, die dem Betrag nach gleichgroße Brechwerte, jedoch unterschiedliche Vorzeichen besitzen: eine Konvexlinse mit  $D_1 = 5 \text{dpt}$  und eine Konkavlinse mit  $D_2 = -5 \text{dpt}$ . Die Linsen mögen einen Abstand von  $d = 10 \text{cm} = 0,1 \text{m}$  haben und sich in Luft ( $n = 1,00$ ) befinden. Mit der hier - gemäß den Voraussetzungen - nicht anwendbaren Formel (9) ergäbe sich  $D_g = 0 \text{dpt}$ . Mit der Gullstrandschen Formel (10) folgt:

$$D_g = 5 - 5 - 0,1 \cdot 5 \cdot (-5) = 2,5 \text{ dpt}$$

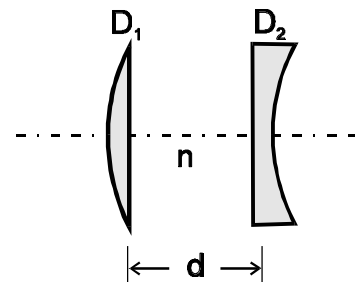


Abb.12: Zu den Bezeichnungen bei der Gullstrandschen Formel

Wie zu erkennen ist, bringt allein der Abstand zwischen beiden Linsen schon einen bemerkenswerten Brechwert zustande. Ähnliches gilt übrigens für Brillenträger; die Einhaltung des richtigen Abstandes Brillenglas - Auge ist für die Korrektionswirkung sehr wichtig.

Die Gullstrandsche Formel hat noch eine weitere wichtige Anwendungsmöglichkeit. Nehmen wir eine dicke Linse mit den Flächenbrechwerten  $D_1$  und  $D_2$ , der Mittendicke  $d$  (in Meter angegeben) und der Brechzahl  $n$  für die Linsensubstanz (Abb.13). Der Gesamtbrechwert dieser Linse errechnet sich ebenfalls mit der Gullstrandschen Formel.

**Beispiel:** Die Flächenbrechwerte der nichtakkommodierten menschlichen Augenlinse im Auge betragen  $D = 7,7\text{dpt}$  und  $D = 12,8\text{dpt}$ ; die Linsendicke beträgt  $d = 3,6\text{mm} = 0,0036\text{m}$  und die Brechzahl  $n = 1,41$ . Mit Formel (9) ergibt sich  $D = 20,5\text{dpt}$ . Mit der Gullstrandschen Formel folgt:

$$D_g = 7,7 + 12,8 - \frac{0,0036}{1,41} \cdot 7,7 \cdot 12,8 = 20,3\text{dpt}$$

Der Unterschied von  $0,2\text{dpt}$  zwischen beiden Ergebnissen scheint nicht groß, spielt aber bei genaueren Rechnungen schon eine Rolle.

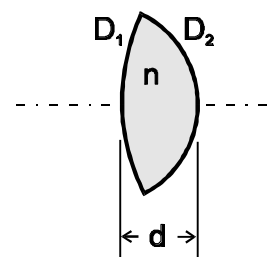


Abb.13: Anwendung der Gullstrandschen Formel auf eine dicke Linse.

Die Gullstrandsche Formel ist nicht bzw. nur fehlerbehaftet anwendbar, wenn man den Gesamtbrechwert zweier dicker Linsen in einem größeren Abstand errechnen will. Es tritt dabei die Frage auf, wo man bei dicken Linsen den Bezugspunkt für den Abstand ansetzen soll. Die weitergehende Behandlung dieser Frage führt zu Definition der sog. Hauptebenen (vgl. Erweiterung des Versuchs bzw. Lehrbuchs).

## 1.6 Korrektur eines aphaken Auges

Der Brechwert eines aphaken Auges beträgt  $D_{\text{aphak}} = 42,7 \text{ dpt}$ . Daraus ergibt sich eine bildseitige Brennweite von  $f_b = 31,2 \text{ mm}$ .

Das normale menschliche Auge mißt von der Hornhautvorderseite (=Hornhautscheitel) bis zu Netzhaut aber nur ca.  $24\text{mm}$  (Abb.14a). Ein auf das aphake Auge treffendes Lichtbündel würde deshalb nicht auf der Netzhaut zu einem Punkt vereinigt werden, sondern dahinter (Abb. 14b). Konkret bedeutet das, daß ein Aphaker in der Ferne nicht scharf sieht. Man muß durch eine vor das Auge gesetzte Linse erreichen, daß der Brennpunkt auf die Netzhaut verlegt wird (Brillenkorrektur; Abb. 14c). Den Brechwert dieser Linse kann man mit den angegebenen Formeln leicht errechnen.

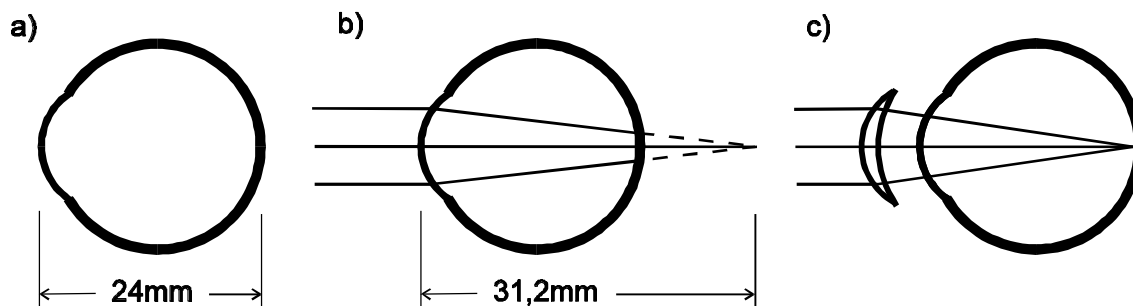


Abb. 14a-c: Korrektur eines aphaken Auges mit einer Linse

## AUG

Aus der Länge des Augapfels von 24mm ergibt sich ein Brechwert von  $D = 1,333/0,024\text{m} = 55,5 \text{ dpt}$ , der notwendig ist, um ein paralleles Lichtbündel auf der Netzhaut zu vereinigen. Das aphake Auge besitzt aber nur einen Brechwert von 42,7 dpt. Daraus ergibt sich gemäß Formel (9) eine Korrektionslinse von

$$D_{\text{korr}} = D_{\text{Auge}} - D_{\text{aphak}} = 55,5 - 42,7 = 12,8 \text{ dpt}$$

Setzt man eine sammelnde Linse von 12,8 dpt in das Auge an Stelle der herausgenommenen Linse, so wird das Auge optimal korrigiert. Derartige Operationen sind heute Routine. Einfacher ist es, eine entsprechend starke Linse vor das Auge in eine Brille zu plazieren. Allerdings ist dann ein etwas anderer Brechwert notwendig, als gerade berechnet. Im Versuch werden Sie ein aphakes Modellauge mit einem Satz von Linsen korrigieren können.

**Anmerkung:** Die gerade durchgeführte Rechnung ist nur als Überschlagsrechnung zu verstehen. In Wirklichkeit bestimmt ein Augenarzt praktisch nie durch Rechnung eine Korrektionsbrille, sondern durch systematisches Probieren.

### 1.7 Akkommodation, Kurzsichtigkeit, Übersichtigkeit

Ein normalsichtiges Auge ist dadurch gekennzeichnet, daß sich ein paralleles Lichtbündel gerade auf der Netzhaut zu einem Punkt vereinigt. Und zwar gilt das für das nichtakkommodierte Auge (Abb. 15a).

Akkommodation bedeutet, daß die Linse des menschlichen Auges ihre Krümmung, d.h. den Brechwert verändern kann. Damit wird auch der Brechwert des gesamten Auges verändert und es wird möglich, in verschiedenen Abständen scharf zu sehen.

Ein paralleles Lichtbündel, das auf ein akkommodiertes Auge fällt, wird von der Netzhaut vereinigt; sein Brennpunkt liegt im Glaskörper (Abb. 15b).

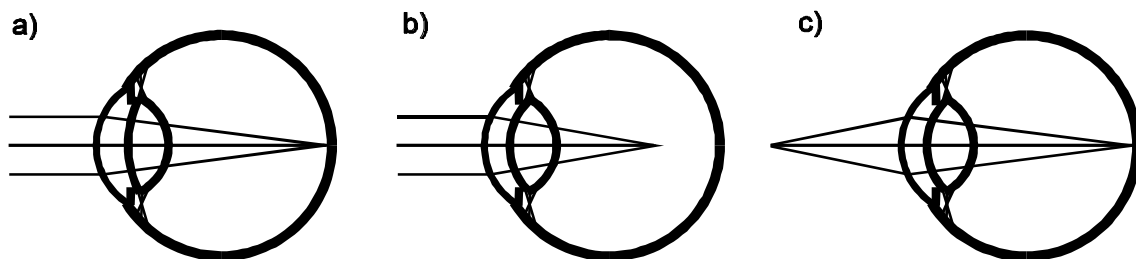


Abb. 15: Akkommodation des menschlichen Auges

Ein Gegenstand, der in endlicher Entfernung vor dem akkommodierten Auge liegt, wird gerade scharf auf die Netzhaut abgebildet; die Bildpunkte liegen auf der Netzhaut (Abb. 15c).

Man muß genau zwischen Bildpunkt und Brennpunkt unterscheiden: beim akkommodierten Auge liegt der Brennpunkt vor der Netzhaut, der Bildpunkt eines in einer bestimmten Entfernung befindlichen Gegenstandes auf der Netzhaut. Beim nichtakkommodierten Auge fallen Brennpunkt und Bildpunkt (eines sehr weit entfernten Gegenstandes) zusammen.

**Kurzsichtigkeit** heißt, daß der Brechwert des (nichtakkommodierten) Auges zu groß bzw. die Brennweite zu klein im Vergleich zur Länge des Augapfels ist. Ein paralleles Lichtbündel wird vor der Netzhaut vereinigt (Abb. 16a). Im akkommodierten Zustand liegt der Brennpunkt noch weiter von der Netzhaut weg im Glaskörper.

Zur Korrektur der Kurzsichtigkeit schaltet man eine zerstreue Linse vor das Auge. Der negative Brechwert der zerstreuen Linse addiert zu dem zu großen Brechwert des kurzsichtigen Auges ergibt gerade den richtigen Brechwert, der notwendig ist, um ein paralleles Lichtbündel auf der Netzhaut zu vereinigen (Abb. 16b).

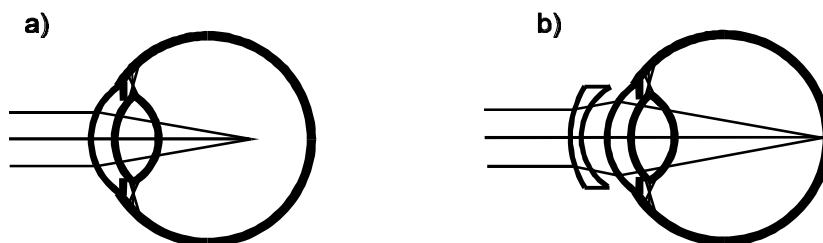


Abb. 16a,b: Korrektur einer Kurzsichtigkeit

Von **Übersichtigkeit** (fälschlich Weitsichtigkeit) spricht man, wenn der Brechwert des Auges zu klein bzw. die Brennweite zu groß ist. Ein paralleles Lichtbündel würde - ähnlich wie im aphaken Auge - hinter der Netzhaut vereinigt (Abb. 17a).

Wenn ein Übersichtiger akkommodiert, kann es ihm gelingen, in der Ferne scharf zu sehen. Ist seine Übersichtigkeit zu groß, reicht die Akkommodation aber nicht aus. Korrigiert wird die Übersichtigkeit mit einer sammelnden Linse (wie beim aphaken Auge).

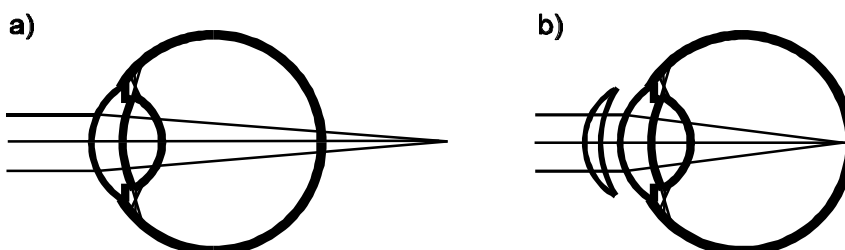


Abb. 17a,b: Korrektur einer Übersichtigkeit

### 1.8 Vorzeichenkonvention in der Optik

Wenn man in der Optik eindeutig rechnen möchte, muß man Strecken (und Winkel) als gerichtete Größen mit Vorzeichen ansehen. Vor allen Dingen in einer weiterführenden Augenoptik ist die Kenntnis der Vorzeichenregeln von Nutzen. Um die Grundlagen dieses Versuchs nicht allzusehr auszudehnen, sind im folgenden nur die Vorzeichenregeln angeführt, die hier eine Rolle spielen können. Die Regeln lauten:

- a) Die positive Richtung der optischen Achse weist von links nach rechts. Das Licht wird üblicherweise als von links kommend angenommen.
- b) Strecken, die von einem Bezugspunkt (Flächenscheitel o.ä.) aus zu einem Punkt rechts davon auf der optischen Achse führen, werden positiv gerechnet. Solche, die zu einem Punkt links vom Bezugspunkt führen, werden negativ gerechnet.
- c) Krümmungsgradien werden immer von der Peripherie zum Krümmungsmittelpunkt gerechnet. Entsprechend ist der Radius einer Fläche negativ, wenn der Krümmungsmittelpunkt links vom Flächenscheitel liegt.



Abb. 18: Vorzeichenkonvention in der Optik

Für Formel (1) bedeutet diese Konvention konkret - wenn man den Flächenscheitel S als Bezugspunkt nimmt - daß die Strecke b und der Krümmungsradius r positiv, die Strecke a negativ zählen. Die Formel (1) lautet deshalb jetzt korrekt:

Formel (1a) 
$$-\frac{n_1}{a} + \frac{n_2}{b} = \frac{n_2 - n_1}{r}$$

Setzt man a negativ ein, ergibt sich im Endergebnis dasselbe wie in Formel (1). Zunächst scheint mit der Vorzeichenregelung nichts gewonnen, bloß Verwirrung gestiftet. Ein Vorteil ergibt sich aber schon an dieser Stelle für manche Rechnungen. Aus dem Vorzeichen ergibt sich nämlich auch umgekehrt eindeutig, wo - bezogen auf den Flächenscheitel - Bild- und Objektpunkte bzw. Brennpunkte liegen.

Wäre z .B. ein Gegenstand im Abstand r/2 links vom Scheitel (Bezugspunkt), d.h. also a=-r/2 so folgt mit n<sub>1</sub> = 1,000 (Luft) und n<sub>2</sub> = 1,333 (Wasser)

$$-\frac{n_1}{-\frac{r}{2}} + \frac{n_2}{b} = \frac{n_2 - n_1}{r}$$

d.h.  $b = -0,8 \cdot r$

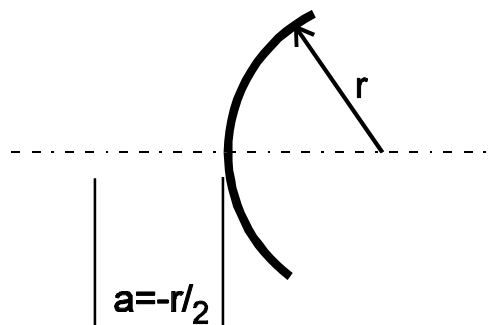


Abb.19: Anwendung der Vorzeichenkonventionen

d.h. das Bild liegt auf der gleichen Seite wie der Gegenstand (virtuelles Bild; vgl. Lehrbuch).

Eine weitere Anwendung ergibt sich bei der Berechnung der optischen Wirkung der Cornea des Menschen. Formel (7) lautet korrekt mit Vorzeichen:

$$\text{Formel (7a)} \quad D_L = \frac{n_2}{f_b} = -\frac{n_1}{a} + \frac{n_2}{b} = \frac{n_L - n_1}{r_1} + \frac{n_2 - n_L}{r_2}$$

Der Krümmungsradius  $r_2$  ist bei einer Bikonvexlinse negativ, da der Krümmungsmittelpunkt links vom Bezugspunkt (Linsenmitte) liegt. Bei Anwendung der Formel (7a) mit negativem Krümmungsradius  $r_2$  ergibt sich also dasselbe wie früher mit Formel (7) und positivem Krümmungsradius  $r_2$ .

Bei der Cornea des Menschen sind aber bei Anwendung der Formel (7a) beide Krümmungsradien positiv zu rechnen (vgl. Abb.20)

Es ergibt sich ein Brechwert von

$$D = 43 \text{ dpt}$$

Hätte man Formel (7) ohne zusätzliche Überlegung angewendet, würde sich ein unsinniger Wert ergeben.

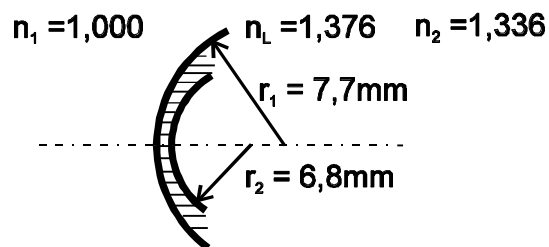


Abb.20: Durchschnittliche Daten der menschlichen Cornea

## 1.9 Scheitelbrechwert von Brillengläsern

Die bisher angeführten Formeln gestatten es, den **Brechwert** einer Linse bzw. optischen Systems zu berechnen. Bei Brillengläsern wird aber immer der sogenannte **Scheitelbrechwert** angegeben. Bis zu einem Betrag von ca. 5dpt unterscheiden sich beide Werte meist vernachlässigbar wenig, danach jedoch immer stärker. Die genaue Definition und Gegenüberstellung von Brechwert und Scheitelbrechwert finden Sie in der Erweiterung dieses Versuchs.

**2.0 Hinweis:** Ist der Brechwert  $D_L$  einer Linse in Luft bekannt, so kann man den Brechwert  $D_W$  dieser Linse in einer Flüssigkeit anderer Brechzahl ( $n_W$ ) berechnen, wenn außerdem die Brechzahl der Linsensubstanz ( $n_L$ ) bekannt ist. Es gilt (für dünne Linsen):

$$D_W = \frac{n_L - n_W}{n_L - 1} \cdot D_L$$

Die Herleitung dieser Formel aus Formel (7) sollten Sie können; beliebte Frage bei mündlichen Prüfungen.

### 3 Versuchsaufbau und-zubehör

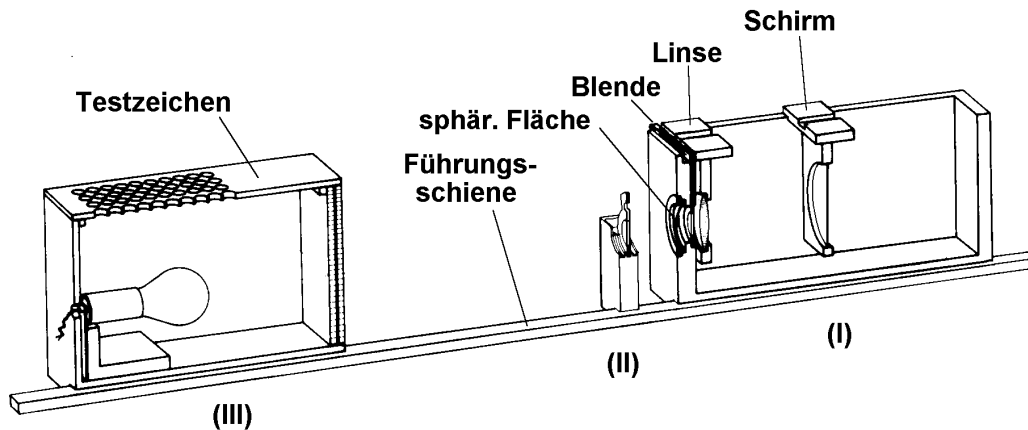


Abb.21: Modellauge (I), Halter für Probiergläser (II) und Testzeichen (III).

Die Abbildung zeigt im Halbschnitt das Modellauge (I), den Halter für Probiergläser (II) und das Testzeichen (III), angeordnet auf einer Führungsschiene (Messingprofil 8x15mm).

- (I) Das **Modellauge** besteht aus einem wasserdichten, transparenten Plexiglkasten, in den ein Schirm (=Netzhaut) verschiebbar eingehängt werden kann, einer Linse und einer Blende (=Pupille). An der Frontfläche des Modells ist eine sphärische Fläche (=Hornhaut) eingelassen. Schirm, Linse und Blende können auch außerhalb des Modells auf der Führungsschiene wie auf einer herkömmlichen optischen Schiene aufgebaut werden.
- (II) **Probierglashalter**; in diesen können Gläser (sog. Probiergläser, heute auch Refraktionsgläser genannt) verschiedenen Brechwertes zur Korrektur einer "Fehlsichtigkeit" des Modellauges eingesetzt werden. Auf den Probiergläsern ist der Brechwert in Dioptrien angegeben (genauer muß man sagen, daß der sog. Scheitelbrechwert angegeben ist, der sich aber bis zu Brechwerten von 5 dpt nicht nennenswert vom Brechwert unterscheidet; zur Definition des Scheitelbrechwertes vgl. Lehrbuch der Augenoptik).
- (III) Der **Gegenstand (Testzeichen)** besteht aus einem schwarzen Plexiglkasten, an dessen eine Seite beleuchtete Testzeichen einschiebbar sind.



Ferner ist eine Linse variablen Brechwerts vorhanden (Abb.22). Diese Linse besteht aus zwei dehnbaren Folien, zwischen die mit einer Spritze in definierter Weise Silikonöl ( $n=1,50$ ) gepreßt werden kann und die auf diese Weise im Brechwert variabel ist. Wegen der hohen Brechzahl des Silikonöls hat die Linse auch in Wasser noch einen gewissen Brechwert. Die variable Linse kann auf die Führungsschneise gestellt und ins Modell eingesetzt werden.

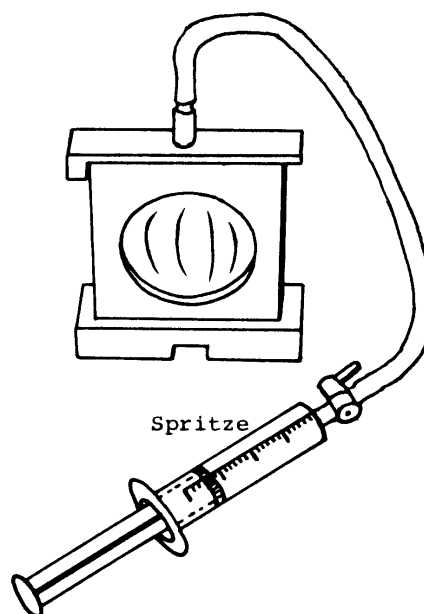


Abb.22: Variable Linse

Die Krümmungsradien der sphärischen Fläche und der Linsen werden mit einem **Sphärometer** gemessen, das auf die zu messende Fläche möglichst senkrecht aufgesetzt wird (Abb.23). Von den drei Stiften, die auf der zu messenden Fläche aufliegen, ist der mittlere Stift beweglich. Der Ausschlag des Zeigers ist der Auslenkung des mittleren Stiftes proportional; der Krümmungsradius läßt sich auf der Skala ablesen. Je nachdem, wie die Fläche gekrümmt ist, erhält man einen positiven oder negativen Krümmungsradius, den man in die entsprechenden Formeln mit Vorzeichen einsetzen muß. Sphärometer sind normalerweise fest auf die Brechzahl des üblichen Brillenglases ( $n=1,523$ ) einjustiert. Es gibt heute aber auch Gläser mit Brechzahlen bis zu  $n=1,8$ .

Mit dem Sphärometer keine Kunststoffgläser messen!

Die Genauigkeit des Sphärometers läßt sich durch Messung eines vorhandenen Krümmungsnormales mit drei bekannten Krümmungen abschätzen.

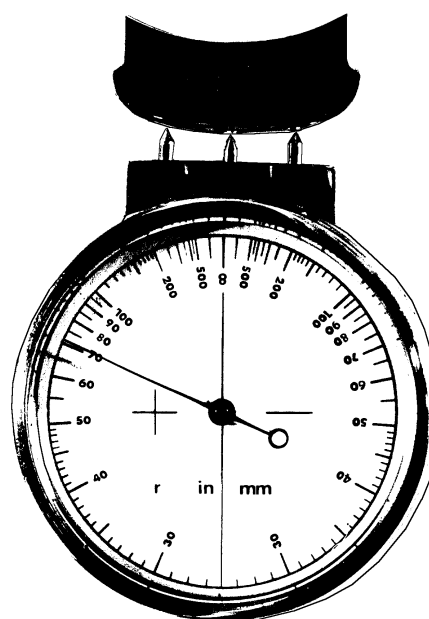


Abb.23: Sphärometer

***Sphärometer nicht auf NULL zu stellen versuchen!!!!***

(Null gibt es nicht auf dem Sphärometer!!!!)

**Bitte trocknen Sie alle mit Wasser in Berührung gekommenen Teile nach dem Versuch ab!**

## 4 Versuchsdurchführung (Modellnr. notieren!)

### 4.1 Bestimmung des Brechwertes einer Linse aus Gegenstands und Bildweite

**Messung:** Diese erste Messung findet außerhalb des Augenmodells statt!

Linse 1 und Schirm (=Mattscheibe) auf die Führungsschiene (Messingprofil; außerhalb des Plexiglaskastens) setzen, Blende 1 möglichst dicht an die Linse schieben und das Testzeichen auf den Schirm scharf abbilden. Dabei auf die Mitte des Testzeichens scharfstellen.

Messen Sie Gegenstands- und Bildweite. Die gleiche Messung für mindestens vier weitere Gegenstands- und Bildweiten durchführen.

Nummer der Linse notieren.

### 4.2 Meßunsicherheit des Sphärometers

**Messung:** Sphärometer auf die Krümmungsnormale aufsetzen und Werte notieren. Sphärometer gegebenenfalls mit einer Zange bzw. mit dem Schlitz in der Schutzkappe vorsichtig durch Drehen am Mittelstift für die Anzeige **unendlich** (nicht auf Null; die gibt es nicht auf dem Sphärometer!!) nachjustieren.

### 4.3 Bestimmung des Brechwertes einer Linse aus den Krümmungsradien

**Messung:** Mit dem Sphärometer die Krümmungsradien der Linse 1 auf beiden Seiten bestimmen (komplette Linsennr. (1.1, 1.2, 1.3 usw.) notieren!)

### 4.4 Anwendung der Gullstrandschen Formel

**Messung:** Dicke der Linse 1 schätzen bzw. messen.

### 4.5 Brillenmessung (freiwillig)

**Messung:** Falls vorhanden: Messen Sie die Krümmungsradien Ihrer eigenen Brillengläser (aber nicht bei Kunststoffgläsern).

### 4.6 Bestimmung des Brechwertes einer sphärischen Fläche aus den Krümmungsradien

**Messung:** Messen Sie mit dem Sphärometer die Krümmungsradien der sphärischen Fläche des Augenmodells von beiden Seiten. Mittelwert aus beiden Radien (Betrag) für weitere Rechnungen verwenden.

### 4.7 Bestimmung des Brechwertes einer sphärischen Fläche aus Gegenstands- und Bildweite

**Messung:** Ins Augenmodell Wasser einfüllen. Blende 1 so einsetzen, daß sie sich im Modell möglichst nahe an der sphärischen Fläche befindet. Testzeichen scharf auf den ebenfalls ins Modell eingehängten Schirm abbilden. Gegenstands- und Bildweite messen

(Bezugspunkt für Abstandsmessungen ist hier die Frontfläche des Modells). Messungen für mindestens fünf verschiedene Gegenstandsweiten durchführen.

#### 4.8 Bestimmung des Brechwertes eines optischen Systems aus Gegenstands- und Bildweite

**Messung:** Linse 1 ins Modell dicht an die sphärische Fläche einsetzen (warum dicht?). Wieder für mindestens fünf verschiedene Gegenstandsweiten die entsprechenden Bildweiten messen. Als Bezugspunkt für die Abstandsmessungen kann man die Mitte zwischen Frontfläche und Linsenmitte nehmen (Gibt es noch sinnvollere Bezugspunkte?). Gewählten Bezugspunkt notieren!

**Hinweis:** Falls sich Luftblasen auf der sphärischen Fläche, Linse oder dem Schirm gebildet haben, sollte man sie mit dem Finger wegstreichen, da sie die Qualität der optischen Abbildung verschlechtern.

#### 4.9 Gullstrandsche Formel

**Messung:** Abstand zwischen sphärischer Fläche und Linsenmitte bestimmen.

#### 4.10 Aphakes Auge korrigieren

**Messung:** Testzeichen weit weg ans Ende der Führungsschiene schieben und Bild scharf stellen. Schirm nun nicht mehr verschieben Linse 1 herausnehmen (sog. Staroperation!). Mit Hilfe des Linsensatzes (Probiergläser, die möglichst dicht vor die sphärische Fläche in einen Halter eingesetzt werden) das linsenlose Auge solange korrigieren, bis ein scharfes Bild auf den Schirm vorhanden ist. Evtl. auch Probiergläser miteinander kombinieren. Ein Augenarzt geht beim Brillenanpassen ganz ähnlich vor. Den auf dem optimalen Probierglas (bzw. Summe der Gläser) angegebenen Brechwert notieren.

Gegenstands- und Bildweite messen (was nimmt man hier sinnvollerweise als Bezugspunkt für die Abstandsmessungen?) Gewählten Bezugspunkt notieren!  
Abstand Probierglas - Frontfläche messen.

#### 4.11 Bestimmung des Brechwertes einer variablen Linse

**Messung:** Variable Linse "eichen", d.h. zwischen der Einteilung der Spritze in ml und dem Brechwert der Linse in dpt experimentell einen Zusammenhang ermitteln. Dazu die variable Linse mit dem Spezialhalter auf die Führungsschiene aufsetzen (außerhalb des Modellauges!).

**Vorsicht:** die Linse ist auf dem Spezialhalter nur aufgesteckt! Der Halter unten kann herunterfallen.

Blende 1 an geeigneter Stelle nahe der Linse plazieren. Schirm ebenfalls auf die Führungsschiene außerhalb des Modellauges setzen.

Gegenstands- und Bildweite für verschieden "akkommodierte" Linse messen (mindestens fünf verschiedene Spritzeneinstellungen, darunter 15 ml).

Stempel der Spritze nicht weiter als 20 ml herausziehen!

Das Bild ist übrigens nicht besonders gut scharf zu stellen, da die variable Linse eine relativ schlechte optische Qualität hat, wie die wirkliche Augenlinse auch.

# AUG

## 4.12 Akkommodation (freiwillig)

**Messung:** Nun variable Linse (SpritzenEinstellung 15ml) sowie Blende 1 und Schirm ins Modell einsetzen. Dazu Linse vom Spezialhalter herunternehmen.

Abstand sphär. Fläche - Linsenmitte messen. Testzeichen weit weg schieben. Schirm solange verschieben, bis ein scharfes Bild vorhanden ist;

**Merke unbedingt: Schirm dann an der Stelle belassen!!!**

Gegenstands- und Bildweite messen (Bezugspunkt für die Messungen ist wieder die Mitte zwischen sphär. Fläche und Linsenmitte) Linse akkommodieren (SpritzenEinstellung notieren) und **Testzeichen** solange verschieben, bis das Bild wieder scharf ist.

Gegenstandsweite messen.

Variable Linse in entspanntem Zustand hinterlassen (20 ml).

## 5 Versuchsauswertung

### 5.1 Bestimmung des Brechwertes einer Linse aus Gegenstands und Bildweite

Berechnen Sie die Brechwerte der Linse 1 in Luft und bilden Sie einen Mittelwert (inkl. Fehlerangabe).

Achtung: Abstände in Meter (m) in die Formeln einsetzen.

### 5.2 Meßunsicherheit des Sphärometers

Aus dem Vergleich zwischen Anzeige des Sphärometers und angegebenen Krümmungsradius Meßunsicherheit des Sphärometers abschätzen. Eventuell vorhandene systematische Fehler bei weiteren Auswertungen berücksichtigen.

### 5.3 Bestimmung des Brechwertes einer Linse aus den Krümmungsradien

Den Brechwert der Linse 1 in Luft und in Wasser aus den Krümmungsradien berechnen. Brechzahl Glas  $n = 1,523$ ; Brechzahl Wasser  $n = 1,333$ .

Die Ergebnisse der Berechnungen aus 5.1 und 5.3 vergleichen.

### 5.4 Anwendung der Gullstrandschen Formel

Mit Hilfe der Gullstrandschen Formel den Brechwert der Linse 1 in Luft und Wasser berechnen.

Unterschied zu den Ergebnissen aus 5.1 und 5.3?

### 5.5 Brillenmessung (freiwillig)

Berechnen Sie den Brechwert Ihrer Brillengläser.

(Brechzahl Kunststoffbrillengläser = 1,50)

Übereinstimmung mit tatsächlichem Brechwert?

### 5.6 Bestimmung des Brechwertes einer sphär. Fläche aus den Krümmungsradien

Berechnen Sie den Brechwert der sphärischen Fläche für den Fall, daß sich Wasser im Modell befindet.

### 5.7 Bestimmung des Brechwertes einer sphärischen Fläche aus Gegenstands- und Bildweite

Aus Gegenstands- und Bildweite den Brechwert, die bild- und objektseitige Brennweite der sphärischen Fläche berechnen.

Vergleich mit dem unter 5.6 bestimmten Brechwert?

### 5.8 Bestimmung des Brechwertes eines optischen Systems aus Gegenstands- und Bildweite

Den Brechwert des Gesamtsystems aus Gegenstands- und Bildweite berechnen und mitteln.

Vergleich vornehmen mit der Summe der Brechwerte der sphärischen Fläche und der Linse 1 in Wasser; Übereinstimmung?

### 5.9 Gullstrandsche Formel

Den Gesamtbrechwert des Modells mit der Gullstrandschen Formel berechnen.

Unterschied zum Ergebnis aus 5.8?

### 5.10 Aphakes Auge korrigieren

Der Brechwert des optimalen Probierrglases stimmt nicht überein mit dem Brechwert der Linse 1 in Wasser! Warum nicht?

Kann man aus den durchgeführten Messungen den Unterschied erklären? auch quantitativ?

Tun Sie das bitte!

Glücklicherweise muß ein Augenarzt derartige Rechnungen nicht ständig durchführen.

### 5.11 Bestimmung des Brechwertes einer variablen Linse

Jeweils aus Gegenstands- und Bildweite den Brechwert der variablen Linse (in Luft und in Wasser!) für die verschiedenen Einstellungen errechnen. Brechzahl der Flüssigkeit in der Linse (Silikonöl) = 1,500.

### 5.12 Akkommodation (freiwillig)

Gesamtbrechwert des Modellauges ohne und mit der Gullstrandschen Formel berechnen. Lohnt die Korrektur mit der Gullstrandschen Formel?

## AUG

Mit Hilfe des Gesamtbrechwertes (Summe Brechwert sphär. Fläche und Brechwert variable Linse in Wasser für die gewählten Spritzeneinstellungen) und der gemessenen Bildweite die Gegenstandsweite berechnen.

Vergleich mit der gemessenen Gegenstandsweite?

## 6 Aufgaben

- 1) Zeichnen Sie ein Auge im Querschnitt auf und benennen Sie die bei der optischen Abbildung mitwirkenden Teile inklusive ihrer Funktion!
- 2) Wie groß ist der Brechwert einer Kugellinse aus Glas ( $n = 1,500$ ) mit einem Durchmesser von 20 mm?
- 3) Welche einschränkenden Bedingungen gelten für die Anwendung der Formel (9): Gesamtbrechwert einer Linsenkombination gleich Addition der Einzelbrechwerte der Linsen?
- 4) Welchen Brechwert hätte die Linse des menschlichen Auges in Luft?
- 5) In welchem Abstand von der Netzhaut liegt der Brennpunkt eines Auges mit einer Kurzsichtigkeit von 3 dpt?
- 6) Wie heißen die verschiedenen Linsenformen und wie lassen sie sich charakterisieren?
- 7) Wie groß ist der Brechwert eines unter Wasser getauchten aphaken Auges (ohne Taucherbrille)?
- 8) Um welchen Faktor unterscheiden sich bei einer sphärischen Fläche bildseitige und objektseitige Brennweite?
- 9) Eine bikonvexe Linse habe in Luft einen Brechwert von  $D = 10\text{dpt}$ ; die Brechzahl des Linsenmaterials betrage  $n_L = 1,50$ . Ferner sei  $r_1 = r_2$ .  
Wie groß sind die Krümmungsradien der Linse in mm?
- 10) Weisen Sie nach, daß bei einer sphärischen Fläche gilt:  $f_b - f_o = r$ .
- 11) Ist der Brechwert einer bikonvexen Glaslinse ( $n_L = 1,523$ ) in einem Medium mit einer Brechzahl von  $n = 1,6$  positiv oder negativ?  
Wirkt die Linse in diesem Medium sammelnd oder zerstreuend?
- 12) Ein zerstreues Brillenglas mit meniskusartiger Form habe die Krümmungsradien  $r_1 = 80\text{ mm}$  und  $r_2 = 67\text{ mm}$  ( $n_L = 1,523$ ).  
Wie groß ist der Brechwert?